

УДК 620.178.3

К.А. Трапезон, канд. техн. наукНациональный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”,
пр. Победы 37, Киев-56, 03056, Украина.

Решение задачи о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки с толщиной, убывающей от центра по вогнутой параболе

Рассмотрена задача о собственных колебаниях кольцевой пластинки с толщиной, убывающей от центра по вогнутой параболе. Показан способ решения дифференциального уравнения четвертого порядка, которое описывает собственные колебания осесимметричной пластинки. Вычислены собственные частоты и построены прогибы для первых трех форм осесимметричных колебаний пластинки с жестким закреплением по внутреннему контуру. Отмечена возможность приближенной оценки напряженно-деформированного состояния рассмотренной пластинки на основе результатов, полученных ранее для пластинки линейно-переменной толщины. Библ. 7, рис. 4, табл. 2.

Ключевые слова: пластинка, переменная толщина, метод симметрии, собственные частоты, формы колебаний, напряженно-деформированное состояние.

Введение

Пластинки переменной толщины, которые работают в условиях переменных нагрузок, находят применение в различных промышленных ультразвуковых устройствах многоцелевого назначения. К подобным конструктивным элементам относятся также турбинные диски, детали гидроустановок и компрессоров в виде дисковых пружин, элементов гибких соединений валов, гибких задвижек и клапанов. Поскольку в перечисленных приложениях пластинки как правило, работают или могут работать в условиях колебаний при резонансных режимах, то возникает необходимость оценки их напряженно-деформированного состояния, анализ которого основывается непосредственно на поиске решения задачи о собственных изгибных колебаниях пластинок переменной толщины.

Постановка задачи и цель работы

Основная проблема в задачах о колебаниях пластинок переменной толщины связана с поиском однозначного решения определяющих

дифференциальных уравнений четвертого порядка.

В обобщающем пособии [1] рассмотрены гиперболические пластинки дискового типа для случая изменения толщины по закону $h = h_0 r^{-n}$ ($n > 0$). При этом решение, которое позволяет описать осесимметричные изгибные колебания, получено на основе использования балочных функций. Собственные же частоты предлагается приближенно находить из соотношения, куда входит потенциальная и кинетическая энергии пластинки. Такой подход, очевидно, имеет ограниченное применение в силу его приближенности и наличия громоздких формул.

Монография [2] дает общее представление о решении задачи об изгибных колебаниях круглой пластинки, но только для случая линейно-переменной толщины $h = H_0(1 - \rho)$ (где H_0 – постоянная; ρ – координата относительно радиуса пластинки). Следует отметить, что данное решение, полученное только для основной формы собственных осесимметричных колебаний, основано на использовании сравнительно громоздкого математического аппарата гипергеометрических функций, что при инженерном проектировании пластинчатых элементов требует особой математической подготовки.

Целью работы является создание алгоритма по расчету круговых пластинок переменной толщины с законом $H = (1 - \mu\rho)^2$ (где μ – постоянная), который позволил бы провести расчет колебаний в уточненной постановке. Кроме этого, задача об осесимметричных колебаниях пластинок такого вида, должна быть решена при помощи сравнительно простых аналитических зависимостей, которые позволяют находить частоты, прогибы и напряжения целого ряда форм собственных колебаний.

Исходное уравнение и его преобразование

Волновое уравнение IV порядка, описывающее осесимметричные колебания

$W(\rho, t) = W(\rho) \cos \omega t$ круговой пластинки толщиной $h = H_0 H(\rho)$, приведенное, например в [3], после отделения временной части $\cos \omega t$ ($\omega = 2\pi f$ - круговая частота; f - циклическая частота) принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

$$W^{(4)} + 2 \frac{(\rho H^3)'}{\rho H^3} W''' + \left[\frac{(H^3)''}{H^3} + \frac{(H^{6+3\nu} / \rho)'}{H^{6+3\nu}} \right] W'' + \frac{1}{\rho H^3} \left[\nu (H^3)' - \frac{H^3}{\rho} \right] W' - \frac{\lambda^4}{H^2} W = 0, \quad (1)$$

где

$$\lambda^2 = \frac{\omega \cdot R^2}{H_0} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\gamma}{gE}}; \quad (2)$$

$\rho = \frac{r}{R}$ - относительный радиус; r - переменный радиус; R - постоянный радиус; H - переменная толщина; H_0 - постоянная; ω - круговая частота; ν - коэффициент Пуассона; E - модуль Юнга; γ - удельный вес материала пластинки; g - ускорение силы тяжести.

Если $\nu = 1/3$, что справедливо для большинства конструкционных металлических материалов, то при параболическом законе $H = (1 - \mu\rho)^2$ (рис.1,а) уравнение (1) можно определить как

$$\left[H \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{(H^2\rho)'}{H\rho} \frac{d}{d\rho} - 2\mu^2 \right] \times \left[H \frac{d^2 W}{d\rho^2} + \frac{(H^2\rho)'}{H\rho} \frac{dW}{d\rho} - 2\mu^2 W \right] - (\lambda^4 - 4\mu^4) W = 0 \quad (3)$$

Такое представление позволяет согласно методу факторизации заменить уравнение IV порядка (3) двумя уравнениями II порядка

$$HW'' + \frac{(H^2\rho)'}{H\rho} W' - 2\mu^2 W \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} W = 0 \quad (4)$$

и тогда общее решение уравнения (3) будет найдено как сумма решений этих двух уравнений, т.е. $W = W_1 + W_2$, где W_1 решение уравнения (4) при знаке плюс перед $\sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4}$, а W_2 - при знаке минус.

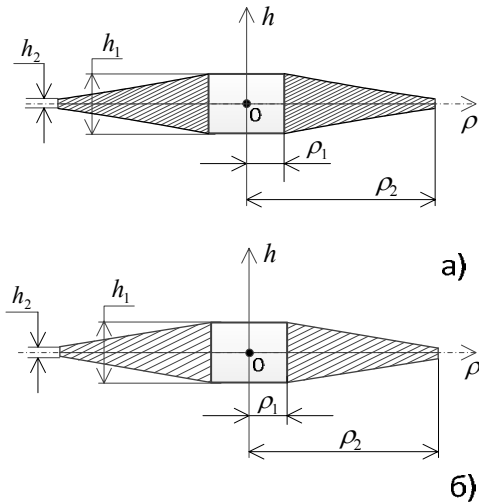


Рис. 1. Изображения осесимметричных круговых пластинок: а) $H = (1 - \mu\rho)^2$; б) $h = H_0(1 - \rho)$

После внесения в (4) выражения $H = (1 - \mu\rho)^2$ получим уравнение

$$W'' + \frac{[(1 - \mu\rho)^4 \rho]'}{(1 - \mu\rho)^4 \rho} W' + \frac{k_*^2}{(1 - \mu\rho)^2} W = 0, \quad (5)$$

где $k_*^2 = -2\mu^2 \pm \sqrt{\lambda^4 - 4\mu^4} = \mu^2 \left[-2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right]$.

Замкнутые решения такого типа уравнений неизвестны, исходя из чего воспользуемся методом симметрий для уравнений второго порядка [4].

Применение метода симметрий для разрешающих уравнений

Преобразуя уравнение (5) путем замены переменной $\rho = \rho(x)$ к виду

$$W_{xx} + \frac{F_x}{F} W_x + k^2 W = 0, \quad (6)$$

где F - площадь поперечного сечения; $k^2 = \text{const}$; $W_x = \frac{dW}{dx}$; $W_{xx} = \frac{d^2W}{dx^2}$, $F_x = \frac{dF}{dx}$, приходим к уравнению, выраженному через переменную $x(\rho)$,

$$x_{\rho}^2 W_{xx} + \left\{ x_{\rho\rho} + \frac{[(1 - \mu\rho)^4 \rho]'}{(1 - \mu\rho)^4 \rho} x_{\rho} \right\} W_x + \frac{k_*^2}{(1 - \mu\rho)^2} W = 0. \quad (7)$$

Пусть $x_\rho^2 = \left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 = \frac{C_1^2}{(1-\mu\rho)^2}$, откуда

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 \int \frac{d\rho}{1-\mu\rho} + C_2 = -\frac{C_1}{\mu} \ln(1-\mu\rho) + C_2; \\ \rho &= \frac{1}{\mu} \left[1 - e^{\frac{C_2-x}{C_1/\mu}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(C_1, C_2 – произвольные постоянные).

Множитель при W_x в уравнении (7), деленный на x_ρ^2 , представим в виде F_x / F , т.е.

$$\frac{F_x}{F} = \frac{1}{x_\rho} \left[\frac{x_{\rho\rho}}{x_\rho} + \frac{[(1-\mu\rho)^4 \rho]_\rho}{(1-\mu\rho)^4 \rho} \right] = \frac{[x_\rho \cdot \rho \cdot (1-\mu\rho)^4]_\rho}{[x_\rho \cdot \rho \cdot (1-\mu\rho)^4]_\rho}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} F &= x_\rho \cdot \rho \cdot (1-\mu\rho)^4 = \frac{C_1}{1-\mu\rho} (1-\mu\rho)^4 \cdot \rho = \\ &= C_1 \rho (1-\mu\rho)^3 \end{aligned}$$

или в переменной $x(\rho)$

$$F = \frac{C_1}{\mu} \left[e^{\frac{3(C_2-x)}{C_1/\mu}} - e^{\frac{4(C_2-x)}{C_1/\mu}} \right]. \quad (9)$$

При этом значение постоянной k^2 в уравнении (6) будет

$$k^2 = \frac{k_*^2}{C_1^2} = \frac{\mu^2 \left(-2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right)}{C_1^2}. \quad (10)$$

Постоянные коэффициенты μ, C_1, C_2 в выше указанных выражениях выбираем, исходя из практических или иных соображений. В данном случае учитывая, что ранее в работе [3] рассмотрен случай $h = H_0(1-\rho)$ при отношении предельных толщин $h_1/h_2 = 1,8$ на границах

$\rho_1 = 0,1$ и $\rho_2 = 0,5$ кольцевой пластинки, то для сохранения этого отношения при $h = H_0(1-\mu\rho)^2$ и при тех же границах $\rho = 0,1 \div 0,5$ необходимо принять $\mu = 0,5985$. Отсюда, например, при $C_1 = \mu$ и $C_2 = 0$ границам $\rho_1 = 0,1$ и $\rho_2 = 0,5$ будут соответствовать границы $x_1 = 0,0617$ и $x_2 = 0,3556$. При этом в соответствии с (9) и (10) также получим

$$F = F_0(e^{-3x} - e^{-4x}); \quad k^2 = -2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4}, \quad (11)$$

где F_0 – произвольно выбираемый коэффициент, поскольку при любом F_0 отношение F_x / F остаётся неизменным. Сохранение же отношения h_1/h_2 целесообразно из соображений возможных обобщений и/или соответствующих выводов по результатам сравнения данных, полученных при изучении случаев $h = H_0(1-\rho)$ и $h = H_0(1-\mu\rho)^2$.

Уравнения (6) при данном $F(x)$ не разрешимы в известных функциях, однако можно решить задачу после замены $F(x) = D^2(x)$ аппроксимирующей функцией $F_1(x) = D_1^2(x)$ при которой становится возможным получить требуемое решение. В качестве аппроксимирующей принимаем функцию

$$D_1(x) = D_{01} \sqrt{x} [J_0(mx) - \chi Y_0(mx)], \quad (12)$$

которая при надлежаще выбранных постоянных D_{01}, m, χ на заданном интервале $x = x_1 \div x_2$ должна с максимально возможным приближением соответствовать выражению

$$D(x) = \sqrt{e^{-3x} - e^{-4x}}, \quad (13)$$

следующему из (11).

На рисунке 2 показаны графики изменения функций $D(x)$ и $D_1(x)$, построенные согласно (12) и (13) при $D_{01} = 0,65605$; $m = 2,5$; $\chi = 0,2864$.

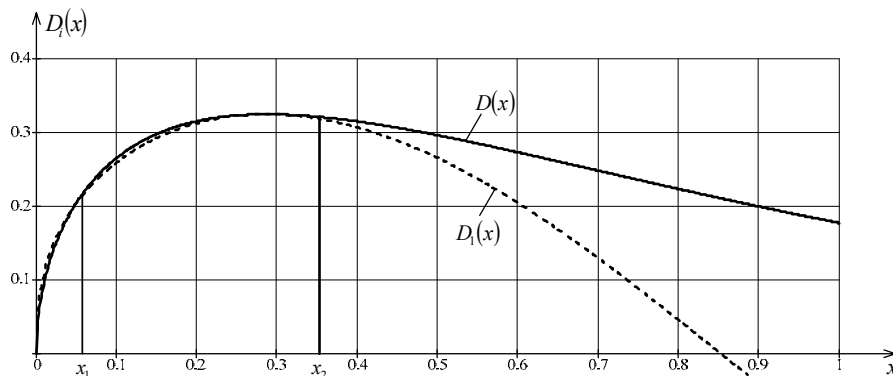


Рис. 2. Графическое изображение аппроксимации функции $D(x)$

Как видно, на интервале $x = 0,0617 \div 0,3556$ совпадение D и D_1 вполне удовлетворительное. В таблице 1 приведены также результаты вычисления функций $D(x)$ и $D_1(x)$ при различ-

ных значениях x , из которых приходим к выводу, что количественное несовпадение функций (12) и (13) на данном интервале в среднем составляет величину $\delta_{cp} = 0,7\%$.

Таблица 1. Значение функций $D(x)$ и $D_1(x)$ на интервале $x = 0,0617 \div 0,3556$

x	0,0617	0,1	0,15	0,2	0,25	0,2877	0,3	0,35	0,35561
D	0,2202	0,2655	0,298	0,3154	0,3232	0,3247	0,3246	0,3214	0,3208
D_1	0,2202	0,2596	0,2927	0,3127	0,3228	0,3247	0,3246	0,3192	0,3179
$\delta = \left(\frac{D}{D_1} - 1\right) \cdot 100\%$	0	0,2	1,8	0,86	0,12	0	0	0,68	0,91

Уравнения (6) при выбранной функции $F_1 = D_1^2(x)$ можно записать в виде

$$W_{1,2}'' + 2 \frac{[\sqrt{x}Z_0(mx)]'}{\sqrt{x}Z_0(mx)} W_{1,2}' + \left[-2 \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4} \right] W_{1,2} + k_{1,2}^2 = 0, \quad (14)$$

где $Z_0(mx) = J_0(mx) - \chi Y_0(mx)$; $m = 2,5$;

$$\chi = 0,2864; \quad k_1^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 - 2};$$

$$k_2^2 = -\left[\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 + 2} \right].$$

Их точные решения, полученные методом симметрий, будут

$$W_1 = \frac{AJ_0(mx) + BY_0(mx)}{Z_0(mx)}; \quad W_2 = \frac{A_1I_0(\beta x) + B_1K_0(\beta x)}{Z_0(mx)}, \quad (15)$$

где $\alpha^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 + (m^2 - 2)}$;

$$\beta^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 - 4 - (m^2 - 2)}. \quad \text{Общее решение}$$

уравнения (3) $W = W_1 + W_2$ имеет вид

$$W = \frac{1}{Z_0(mx)} \times [AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x) + A_1I_0(\beta x) + B_1K_0(\beta x)], \quad (16)$$

где A, B, A_1, B_1 – постоянные, значения которых зависят от граничных условий.

Решение для осесимметричной пластинки с жестким закреплением внутреннего контура

Рассмотрим задачу о колебаниях кольцевой пластинки, жестко закрепленной при $\rho_1 = 0,1$ и свободной на крае при $\rho_2 = 0,5$ (рис.3).



Рис. 3. Изображение кольцевой пластинки с жестко закрепленной серединой

При жесткой заделке прогибы и углы поворота элементов пластинки должны быть равны нулю, т.е.

$$(W)_{\rho=\rho_1} = 0; \quad (W_{,\rho})_{\rho=\rho_1} = 0. \quad (17)$$

На свободном крае при осесимметричном деформировании радиальные изгибающие моменты и перерезывающие силы равны нулю, т.е. [5]

$$\left(W_{,\rho\rho} + \frac{\nu}{\rho} W_{,\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0; \quad \left(W_{,\rho\rho\rho} + \frac{1}{\rho} W_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho^2} W_{,\rho} \right)_{\rho=\rho_2} = 0. \quad (18)$$

При переходе к переменной $x(\rho)$ условия (17) и (18) необходимо переписать с учетом зависимостей (8) при $C_1 = \mu$ и $C_2 = 0$, т.е. полагая $x = -\ln(1 - \mu\rho)$. Тогда условия (17) и (18) при $\nu = 1/3$ можно записать в виде

$$(W)_{x=x_1} = 0; (W_x)_{x=x_1} = 0; \quad (19)$$

$$\left[W_{xx} + \left[1 + \frac{1}{3(e^x - 1)} \right] W_x \right]_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[W_{xxx} + \frac{3e^x - 2}{e^x - 1} W_{xx} + \frac{2e^{2x} - 3e^x}{(e^x - 1)^2} W_x \right]_{x=x_2} = 0.$$

Последнее условие можно упростить, после внесения в него W_{xx} из предпоследнего условия, в результате чего получим

$$\left\{ W_{xxx} - \left[1 + \frac{3e^x + 1}{3(e^x - 1)^2} \right] W_x \right\}_{x=x_2} = 0.$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем замены:

$$q = \left(1 + \frac{3e^x + 1}{3(e^x - 1)^2} \right)_{x=x_2}; \quad p = \left(1 + \frac{1}{3(e^x - 1)} \right)_{x=x_2},$$

тогда условия при $x = x_2$ переписутся в виде $(W_{xx} + pW_x)_{x=x_2} = 0; (W_{xxx} - qW_x)_{x=x_2} = 0.$ (20)

Образуем производные $W_x = W'$; $W_{xx} = W''$; $W_{xxx} = W'''$ от функции (16). Для удобства обозначим $W = yZ$, где

$$y = \frac{1}{Z_0(mx)};$$

$$Z = AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x) + A_1I_0(\beta x) + B_1K_0(\beta x).$$

Тогда $W' = y'Z + yZ'$;

$W'' = y''Z + 2y'Z' + yZ''$;

$W''' = y'''Z + 3y''Z' + 3y'Z'' + yZ'''$,

где

$$y' = -\frac{Z_0'(mx)}{Z_0^2(mx)}; \quad y'' = \frac{Z_0''}{Z_0^2} \left(-\frac{Z_0''}{Z_0'} + 2\frac{Z_0'}{Z_0} \right);$$

$$y''' = \frac{Z_0'''}{Z_0^2} \left(-\frac{(Z_0''')}{Z_0'} + 6\frac{Z_0''}{Z_0} - 6\frac{Z_0'^2}{Z_0^2} \right).$$

Используя формулы дифференцирования бесселевых функций [6], получим

$$Z_0 = J_0\chi Y_0; \quad Z_0' = -m(J_1 - \chi Y_1);$$

$$Z_0'' = m^2 \left[-(J_0\chi Y_0) + \frac{1}{mx}(J_1 - \chi Y_1) \right];$$

$$(Z_0''') = m^3 \left[\frac{1}{mx}(J_0 - \chi Y_0) + \left(1 - \frac{2}{m^2\chi^2}(J_1 - \chi Y_1) \right) \right].$$

Здесь везде функция Z_0 и ее производная по x имеет аргумент mx , который для сокращения записи опущен. Поскольку условия (20) с учетом обозначения $W = yZ$ переписутся следующим образом

$$[Z''y + Z'(py + 2y') + Z(py' + y'')]_{x=x_2} = 0;$$

$$[Z'''y + 3Z''y' + Z'(3y'' - qy) + Z(y''' - qy'')]_{x=x_2} = 0,$$

то для некоторого упрощения внесем Z'' из первого выражения во второе. В результате получим

$$\left[Z'' + Z' \left(p + 2\frac{y'}{y} \right) + Z \left(p\frac{y'}{y} + \frac{y''}{y} \right) \right]_{x=x_2} =$$

$$= [Z'' + Z'a^* + Zb^*]_{x=x_2} = 0;$$

$$\left[Z''' + Z' \left(3\frac{y''}{y} - 6\frac{y'^2}{y^2} - 3p\frac{y'}{y} - q \right) \right] +$$

$$+ Z \left(\frac{y'''}{y} - 3\frac{y'y''}{y^2} - q\frac{y'}{y} - 3p\frac{y'^2}{y^2} \right)_{x=x_2} =$$

$$= [Z''' + Z'c^* + Zd^*]_{x=x_2} = 0$$

Определив p, q, y, y', y'', y''' и образуемые этими величинами выше приведённые выражения при $x_2 = 0,3556$, $\chi = 0,2864$ и $m = 2,5$, получим окончательно два граничных условия при $x = x_2$:

$$\left. \begin{aligned} Z'' + 5,81302Z' + 12,30044Z &= 0; \\ Z''' - 19,68318Z' - 37,97364Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

При этом получены следующие промежуточные величины $p = 1,78057$; $q = 10,65325$; $y = 1,23081$; $y' = 2,48160$; $y'' = 10,7209$; $y''' = 71,273097$.

Выражения Z, Z', Z'', Z''' входящие в систему (21), получим использовав формулы дифференцирования бесселевых функций, т.е.

$$Z = AJ_0(\alpha x) + BY_0(\alpha x) + A_1I_0(\beta x) + B_1K_0(\beta x);$$

$$Z' = -\alpha[AJ_1(\alpha x) + BY_1(\alpha x)] + \beta[A_1I_1(\beta x) - B_1K_1(\beta x)];$$

$$Z'' = \alpha^2 \left\{ A \left[-J_0(\alpha x) + \frac{J_1(\alpha x)}{\alpha x} \right] + B \left[-Y_0(\alpha x) + \frac{Y_1(\alpha x)}{\alpha x} \right] \right\} + \beta^2 \left\{ A_1 \left[I_0(\beta x) - \frac{I_1(\beta x)}{\beta x} \right] + B_1 \left[K_0(\beta x) + \frac{K_1(\beta x)}{\beta x} \right] \right\};$$

$$Z''' = \alpha^3 \left\{ A \left[\frac{J_0(\alpha x)}{\alpha x} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2 x^2} \right) J_1(\alpha x) \right] + B \left[\frac{Y_0(\alpha x)}{\alpha x} + \left(1 - \frac{2}{\alpha^2 x^2} \right) Y_1(\alpha x) \right] \right\} + \beta^3 \left\{ A_1 \left[-\frac{I_0(\beta x)}{\beta x} + \left(1 + \frac{2}{\beta^2 x^2} \right) I_1(\beta x) \right] - B_1 \left[\frac{K_0(\beta x)}{\beta x} + \left(1 + \frac{2}{\beta^2 x^2} \right) K_1(\beta x) \right] \right\}.$$

Граничные условия (19) и (21) в развернутом виде приводят к системе однородных уравнений относительно четырех неизвестных постоянных A, B, A_1, B_1

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + A_1c + B_1d &= 0 \\ Aa_1 + Bb_1 + A_1c_1 + B_1d_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

из условий (19) при $x = x_1 = 0,0617$;

$$\left. \begin{aligned} Aa_2 + Bb_2 + A_1c_2 + B_1d_2 &= 0 \\ Aa_3 + Bb_3 + A_1c_3 + B_1d_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ из условий (21) при}$$

$$x = x_2 = 0,3556, \tag{22}$$

где a, b, c, d, \dots, d_3 – коэффициенты, выражения для которых приведены в работе [7]. При этом согласно (21): $a^* = 5,81302$; $b^* = 12,30044$; $c^* = -19,68318$; $d^* = -37,97364$. Из равенства нулю определителя системы (22) получаем частотное уравнение, откуда вычисляются параметры α_j или $\beta_j = \sqrt{\alpha_j^2 - 2(m^2 - 2)}$, которые

связаны с частотой посредством формулы (2) и соотношениями при выражениях (15).

Путем преобразований (22) можно заменить системой двух однородных уравнений относительно двух неизвестных, например, A_1, B_1 . В таком случае вместо частотного уравнения, полученного на основе определителя IV порядка легко получить эквивалентное частотное уравнение, приравняв нулю определитель следующей системы двух уравнений

$$A_1L_1 + B_1L_2 = 0; \quad A_1L_3 + B_1L_4 = 0.$$

Частотное уравнение, следовательно, будет

$$L_1L_4 - L_2L_3 = 0, \tag{23}$$

где составляющие уравнения L_1, L_2, L_3, L_4 можно найти на основе выражений, которые приведены в [7]. После вычисления корней уравнения (23) можно найти отношения амплитудных коэффициентов по равносильным формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_1}{B_1} &= -\frac{L_2}{L_1} = -\frac{L_4}{L_3} \\ \frac{B}{B_1} &= -\left(\frac{A_1 ca_1 - c_1a}{B_1 ba_1 - b_1a} + \frac{da_1 - d_1a}{ba_1 - b_1a} \right) = -\left(\frac{A_1 ca_2 - c_2a}{B_1 ba_2 - b_2a} + \frac{da_2 - d_2a}{ba_2 - b_2a} \right) = \\ &= -\left(\frac{A_1 ca_3 - c_3a}{B_1 ba_3 - b_3a} + \frac{da_3 - d_3a}{ba_3 - b_3a} \right) \\ \frac{A}{B_1} &= -\left(\frac{B b}{B_1 a} + \frac{A_1 c}{B_1 a} + \frac{d}{a} \right) = -\left(\frac{B b_1}{B_1 a_1} + \frac{A_1 c_1}{B_1 a_1} + \frac{d_1}{a_1} \right) = \\ &= -\left(\frac{B b_2}{B_1 a_2} + \frac{A_1 c_2}{B_1 a_2} + \frac{d_2}{a_2} \right) = -\left(\frac{B b_3}{B_1 a_3} + \frac{A_1 c_3}{B_1 a_3} + \frac{d_3}{a_3} \right). \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

Корни частотного уравнения (23) получим посредством последовательного вычисления величин $\Delta_j = L_1L_4 - L_2L_3$ при произвольно выбираемых α_j , добиваясь, чтобы $\Delta_j = 0$. В результате найден следующие три корня $\alpha_1 = 7,28527$; $\alpha_2 = 16,4508$; $\alpha_3 = 26,98387$,

чему соответствуют согласно зависимости

$$\alpha_j^2 = \sqrt{\left(\frac{\lambda_j}{\mu} \right)^4 - 4 + (m^2 - 2)}$$

частотные параметры λ_j при заданных исходных значениях $m = 2,5$ и $\mu = 0,5985$. $\lambda_1 = 4,18377$; $\lambda_2 = 9,76832$; $\lambda_3 = 16,10267$. (25)

При помощи коэффициентов системы (22), вычисленных с использованием найденных корней α_i и $\beta_i = \sqrt{\alpha_i^2 - 2(m^2 - 2)}$, вычисляются амплитудные коэффициенты (24) и строятся формы собственных колебаний пластинки. Например, при $\alpha_1 = 7,28527$ и $\beta_1 = 6,67645$ получим $a = 0,95012$; $b = -0,52223$; $c = 1,04288$; $d = 1,08891$; $a_1 = -1,59636$; $b_1 = 11,73709$; $c_1 = 1,40452$; $d_1 = -14,0746$; $a_2 = -6,58265$; $b_2 = -23,73134$; $c_2 = 215,06121$; $d_2 = 2,38592$; $a_3 = 186,10561$; $b_3 = 130,30455$; $c_3 = 121,63798$; $d_3 = -35,33444$.

Тогда согласно (24) для первой формы колебаний кольцевой пластинки найдем

$$\frac{A_1}{B_1} = 0,090813; \quad \frac{B}{B_1} = 1,101176; \quad \frac{A}{B_1} = -0,640497.$$

Не приводя значения коэффициентов a, b, c, \dots , вычисленных при α_2 и α_3 , приведем также величины амплитудных коэффициентов, необходимых для построения второй и третьей форм колебаний, т.е. соответственно для

$$\alpha_2 = 16,4508 - \frac{A_1}{B_1} = -2,612008 \cdot 10^{-3};$$

$$\frac{B}{B_1} = 0,422724; \quad \frac{A}{B_1} = -0,60718, \quad \text{для}$$

$$\alpha_3 = 26,98387 - \frac{A_1}{B_1} = 3,526353 \cdot 10^{-5};$$

$$\frac{B}{B_1} = 0,021555; \quad \frac{A}{B_1} = -0,396261.$$

Для построения форм колебаний используем функцию прогибов (16), выраженную через переменную ρ согласно зависимости $x = -\ln(1 - \mu\rho)$ и записанную в виде

$$W = \frac{B_1}{Z_0(mx)} \times \left[\frac{A}{B_1} J_0(\alpha_i x) + \frac{B}{B_1} Y_0(\alpha_i x) + \frac{A_1}{B_1} I_0(\beta_i x) + K_0(\beta_i x) \right],$$

где при известных $\frac{A}{B_1}$, $\frac{B}{B_1}$, $\frac{A_1}{B_1}$ параметр B_1 является свободно выбираемой величиной, используемой в данном случае для нормировки функции W_i таким образом, чтобы $W_i(\rho = 0,5) = 1$. На рис. 4 представлены первые три формы собственных колебаний пластинки. Величины нормирующих коэффициентов B_1 для W_1, W_2, W_3 равны соответственно 0,869525; -2,421133; 5,665615.

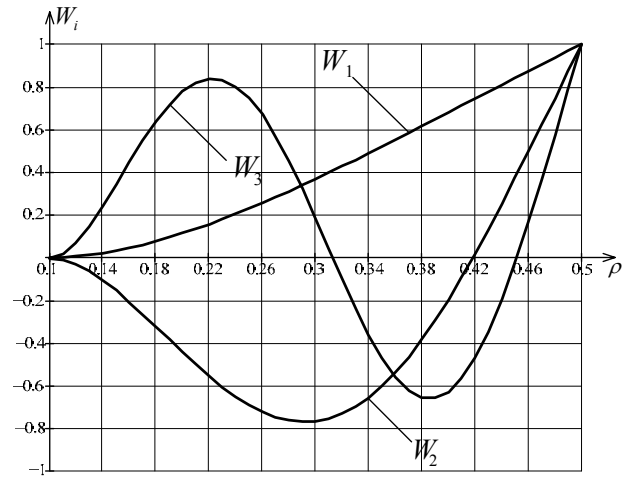


Рис. 4. Графическое изображение трех первых форм колебаний пластинки

Представляет особый интерес сравнение полученных результатов, относящихся к собственным частотам и формам колебаний с аналогичными результатами для пластинки вида $h = H_0(1 - \rho)$, рассмотренной ранее в [3]. Для возможности корректного сравнения колебаний этих пластинок при выборе их исходных геометрических параметров были заранее обеспечены равными граничные размеры ($\rho_1 = 0,1$; $\rho_2 = 0,5$) и соотношение предельных толщин $h(\rho_1)/h(\rho_2) = 1,8$. Из визуального сравнения конфигураций этих пластинок (рис.1) замечено, что заявленная параболическая пластинка толщиной $H = H_0(1 - \mu\rho)^2$ должна быть менее жесткой по сравнению с пластинкой линейно-переменной толщины $h = H_0(1 - \rho)$, поскольку площадь поперечного сечения ее меньше. Это означает, что собственные частоты ее изгибных колебаний должны быть ниже.

Для сравнения в табл. 2 приведены частотные параметры λ_i ; координаты ρ_{0i} узловых окружностей, т.е. тех значений ρ , при которых $W_i = 0$; координаты ρ_{mi} пучностей, т.е. максимальных по абсолютной величине прогибов w_{\max} и значения этих прогибов $W_i(\rho_{mi})$. Из таблицы следует, что частоты (числа λ_i) пластинки линейно-переменной толщины, как и предполагалось, действительно выше соответствующих им значений (25) на (3,75; 1,72; 1,69)%. Остальные характерные параметры, как следует из табл.2, различаются менее существенно или совпадают. Так, экстремальные прогибы $W_i(\rho_{mi})$ исследуемой пластинки несколько выше прогибов альтернативной как более жесткой, а положения узловых окружностей (координаты ρ_{0i}) и окружностей пучностей (координаты ρ_{mi}) практически неизменны.

Таблица 2. Результаты расчета колебаний и их сравнение

Толщина пластинки h/H_0	Частотные параметры λ_j			Координаты узлов ρ_{0j}			Координаты пучностей ρ_{mj}			Прогибы при ρ_{mi} , $W_i(\rho_{mi})$		
	λ_1	λ_2	λ_3	ρ_{01}	ρ_{02}	ρ_{03}	ρ_{m1}	ρ_{m2}	ρ_{m3}	$W_1(\rho_{m1})$	$W_2(\rho_{m2})$	$W_3(\rho_{m3})$
$(1-\mu\rho)^2$	4,1837	9,7683	16,1026	0,1	0,1 0,418	0,1 0,3131 0,4512	0,5	0,292 0,5	0,2226 0,3858 0,5	1	0,764 1	0,838 0,658 1
$1-\rho$	4,3406	9,9364	16,3758	0,1	0,1 0,417	0,1 0,31302 0,4508	0,5	0,291 0,5	0,222 0,3853 0,5	1	0,74 1	0,827 0,645 1

Располагая функцией прогибов W_i , можно получить выражения для радиальных σ_r и окружных σ_θ нормальных напряжений, возникающих в колеблющейся пластинке, изучить их распределение и в целом сделать анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) пластинки. В данном случае несущественные по результатам сравнений двух разновидностей пластинки (табл. 2), позволяет для первичной оценки НДС пластинки $H = H_0(1-\mu\rho)^2$ использовать результаты, касающиеся распределения σ_r и σ_θ , установленные ранее [3] для пластинки $h = H_0(1-\rho)$. Более того, даже количественные данные, полученные в [3], можно непосредственно использовать для приближенной оценки НДС, не прибегая к выкладкам и вычислениям типа тех, что приведены в этой работе.

Новизна результатов работы заключается в разработке метода и алгоритме его реализации для решения задачи о колебаниях пластинки переменной толщины $H = H_0(1-\mu\rho)^2$ параболического типа, убывающей от центра к краю. Практическое значение теоретических результатов состоит в возможности непосредственного использования метода и расчетных данных, полученных в работе, в частности, для рационального проектирования резонансных звуковых и ультразвуковых систем на основе пластинок как акустически активных элементов. Алгоритм решения проблемы в случае значений коэффициента μ , отличных от приведенных в работе, остается неизменным, однако может потребоваться видоизменение аппроксимирующей функции (12), что согласно методу симметрий не представляет принципиальных затруднений.

Выводы

- Решена задача о собственных осесимметричных колебаниях круговой пластинки с толщиной, убывающей от центра по вогнутой параболе $H = H_0(1-\mu\rho)^2$.

- Получены уравнения частот и форм собственных колебаний для кольцевой пластинки с жестким ее закреплением по внутреннему контуру.
- Вычислены первые три частоты и построены соответствующие им собственные формы колебаний.
- Подтверждена эффективность решения задачи методом симметрий, разработанного ранее для линейных уравнений второго порядка.
- Отмечена для данного случая возможность приближенной оценки напряженно-деформированного состояния пластинки на основе результатов, полученных ранее для пластинки линейно-переменной толщины.

Список использованных источников

1. Гонткевич В.С. Собственные колебания пластинок и оболочек: Справочное пособие. — К.: Наукова думка, 1964. — 288 с.
2. Коваленко А.Д. Круглые пластинки переменной толщины. — М.: Физматгиз, 1959. — 294 с.
3. Трапезон К.А. Метод симметрий при колебаниях круговых пластинок переменной толщины // Электроника и связь. — 2012. — № 6. — С. 66—76.
4. Трапезон К.А. Обобщенный метод симметрий при изучении колебаний упругих элементов // Электроника и связь. — 2012. — № 2. — С. 31—34.
5. Варвак П.М., Рябов А.Ф. Справочник по теории упругости (для инженеров-строителей). — К.: Будівельник, 1971. — 418 с.
6. Корнев В.Г. Введение в теорию бесселевых функций. — М.: Наука, 1971. — 288 с.
7. Трапезон К.А., Трапезон А.Г. К решению задачи о колебаниях круговой пластинки с толщиной, убывающей от центра по выпуклой параболе // Электроника и связь. — 2013. — № 6. — С. 44—53.

Поступила в редакцию 29 мая 2014 г.

УДК 620.178.3

К.О. Трапезон, канд.техн.наук

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”,
пр. Перемоги 37, Київ-56, 03056, Україна.

Розв’язок задачі про власні вісесиметричні коливання кругової пластинки, товщина якої зменшується від центру по увігнутій параболі

Розглянуто задачу про власні коливання кільцевої пластинки, яка має товщину, що зменшується від центру за законом увігнутої параболі. Показано спосіб розв’язання диференціального рівняння четвертого порядку, яке описує власні коливання вісесиметричної пластинки. Розраховано власні частоти та побудовано прогини для перших трьох форм коливань пластинки, яка жорстко закріплена по внутрішньому контуру. Відмічено можливість проведення наближеної оцінки напружено-деформованого стану розглянутої кільцевої пластинки на основі результатів, які було отримано раніше для пластинки з лінійним законом зміни товщини. Бібл. 7, рис. 4, табл. 2.

Ключові слова: пластинка, змінна товщина, метод симетрій, власні частоти, форми коливань, напружено-деформований стан.

UDC 620.178.3

K.A. Trapezon, Ph.D.

National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”,
Peremogy Avenue, 37, Kyiv-56, 03056, Ukraine.

The decision of task about the axisymmetric natural vibrations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a concave parabola

A task is considered about the natural vibrations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a concave parabola. The method of decision of differential equalization of fourth order, that describes the natural vibrations of axisymmetric plate, is shown. Natural frequencies are calculated and bending is built for the first three forms of axisymmetric vibrations of plate with the hard fixing on an internal contour. Possibility of close estimation of the tensely-deformed state of the considered plate is marked on the basis of the results got before for the plate of linear-variable thickness. The novelty of job performances consists in development of method for the decision of task about the vibrations of plate of variable thickness of parabolic type, decreasing from a center to the edge. The practical value of the got results consists of possibility of the direct use of method of symmetries and calculation data, in particular, for the rational planning of the resonant voice and ultrasonic systems on the basis of plates as acoustic active elements. Reference 7, figures 4, tables 2.

Keywords: plate, variable thickness, method of symmetry, natural frequencies, forms of vibrations, tensely-deformed state.

References

1. *Gontkevich V.S.* (1964), “Natural vibrations of plates and hulls: manual”. K. Naukova dumka, P. 288. (Rus)
2. *Kovalenko A.D.* (1959), “Round plates with variable thickness”. M. Phisimatgiz, P. 294. (Rus)
3. *Trapezon K.A.* (2012), “Method of symmetries at the vibrations of circular plates of variable thickness” Electronics and Communications, No. 6, pp. 66-76. (Rus)
4. *Trapezon K.A.* (2012), “Generalized method of symmetries at the study of vibrations of resilient elements” Electronics and Communications, No. 2, pp. 31-34. (Rus)
5. *Varvak P.M., Rjabov A.F.* (1971), “Reference book on the theory of resiliency (for engineers-builders)”. K. Budivelnik, P. 418. (Rus)
6. *Korenev V.G.* (1971), “Introduction to the theory of Besselian functions”. M. Nauka, P. 288. (Rus)
7. *Trapezon K.A., Trapezon A.G.* (2013), “To the decision of task about the vibrations of circular plate with a thickness decreasing from a center on a protuberant parabola” Electronics and Communications, No. 6, pp. 44-53. (Rus)