

## Акустические приборы и системы

УДК 535:534.232-8

**А.В. Богдан**<sup>1</sup>, канд. техн. наук, **А.Н. Михеева**<sup>2</sup>, **О.Н. Петрищев**<sup>2</sup>, д.-р. техн. наук

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт прикладной электроники,  
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

<sup>2</sup>Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»,  
ул. Политехническая, 16, корпус 12, г. Киев, 03056, Украина.

### Исследование характеристик силовых полей источников упругих волн в оптически прозрачных пьезоэлектрических кристаллах

*С помощью интегральных преобразований Ханкеля получено и исследовано решение граничной задачи об электрическом поле, которое создается в объеме анизотропного по диэлектрической проницаемости пьезоэлектрического кристалла кольцевым электродом, находящимся на его поверхности. Определены и исследованы поверхностные и объемные плотности сил Кулона, которые создаются электрическим полем кольцевого электрода в  $Z$  – срезе ниобата лития. Показано, что деформирующие пьезоэлектрический кристалл силы Кулона существуют в конечном объеме ограниченном полусферой, радиус которой не превышает двух, максимум трех, наружных радиусов кольцевого электрода. Определены скалярный и векторный потенциалы поля сил Кулона, что позволяет оценить вклады объемных сил в энергетику возбуждаемых продольных и поперечных волн. Библ. 7, рис. 4.*

**Ключевые слова:** акустооптика; математическая модель; продольная волна; силовое поле; электрод; ультразвуковой преобразователь.

#### Введение

В работе [2] приведены основные сведения из теории дифракции света на пучках ультразвуковых волн. При падении светового луча под углом Брэгга на боковую поверхность оптически прозрачного кристалла степень проявления специфических свойств мандельштам – бриллюэновской дифракции находится в прямой зависимости от частоты смены знака параметров ультразвукового пучка.

Повышение эффективности работы акустооптических устройств (прежде всего, дефлекторов и модуляторов) неразрывно связано с возможностями эффективного возбуждения коротковолновых ультразвуковых пучков. Этим словосочетанием в классической версии теории

акустооптических взаимодействий определяется продольная волна. Вместе с тем, деформации сжатия – расширения возникают и в процессе распространения ультразвуковых поперечных (сдвиговых) волн. При этом на одной и той же частоте смены знака напряженно-деформированного состояния, длина поперечной волны в полтора – два раза меньше длины более быстрой продольной волны. Последнее обстоятельство делает актуальным и практически целесообразным исследование возможностей возбуждения сдвиговых (поперечных) волн гигагерцового частотного диапазона.

В работе [2] показано, что источниками объемных волновых полей в оптически прозрачных пьезоэлектрических кристаллах являются поля сил Кулона, которые создаются электрическими полями электродных структур расположенных на поверхности монокристалла. При этом силы Кулона, которые действуют на поверхности пьезоэлектрического кристалла, определяются поверхностными плотностями. Проникающее в глубину кристалла электрическое поле электродной структуры также формирует поле сил Кулона, интенсивность которых определяется вектором объемной плотности. При этом дивергенция вектора объемной плотности сил Кулона формирует скалярный потенциал силового поля. В свою очередь скалярный потенциал определяет кинематические характеристики ультразвукового поля продольных объемных волн. Следовательно, дивергенция вектора объемной плотности сил Кулона играет роль объемного источника продольных волн, которые возбуждаются электродной структурой в оптически прозрачном пьезоэлектрическом кристалле. В работе [2] показано, что ротация вектора объемной плотности сил Кулона играет роль объемного источника поперечных (сдвиговых) волн.

Таким образом, определение условий, при которых возможно эффективное возбуждение

объемных продольных и поперечных ультразвуковых волн, предполагает предварительное исследование характеристик силовых полей источников упругих возмущений. Не сложно доказать, что это исследование является одним из наиболее важных и, как показывает анализ литературных источников, не изученных до настоящего времени вопросов теории акустооптических ячеек.

В настоящей статье предлагается методика расчета электрического поля кольцевого электрода, и обсуждаются результаты исследования характеристик созданного им поля сил Кулона.

**1. Расчет электрического поля кольцевого электрода**

Рассмотрим кольцевой электрод (позиция 1 на рис. 1), который находится в вакууме, на расстоянии  $\delta$  от поверхности диэлектрического кристалла. Радиальные размеры  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_2 > R_1$ ) и толщина  $b$  электрода существенно меньше размеров кристалла, и по этой причине кристалл фигурирует в последующих расчетах как полупространство (позиция 2), ограниченное поверхностью  $x_3 = 0$ , где  $(x_1, x_2, x_3)$  - координатные оси правинтовой декартовой системы координат. Электрические свойства вакуума определим диэлектрической проницаемостью  $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м. Для упрощения вычислений будем считать, что диэлектрические проницаемости  $\chi_{ij}$  кристалла определяются диагональной матрицей, т. е.

$$\chi_{ij} = \begin{vmatrix} \chi_{11} & 0 & 0 \\ & \chi_{22} & 0 \\ & & \chi_{33} \end{vmatrix}. \quad (1.1)$$

Определим вектор напряженности  $\vec{E}^*(x_k)$  электрического поля в объеме диэлектрика в предположении, что на кольцевом электроде задан электрический потенциал  $U_0$ .

Особо оговорим то обстоятельство, что расчет электрического поля выполняется для электродной структуры субмикронных размеров и это позволяет решать задачу в статической постановке даже на гигагерцовых частотах смены знака электрического потенциала.

При этом электрическое поле в области  $z > 0$ , т. е. над поверхностью диэлектрика определяется следующим образом [7]

$$\text{div} \vec{D} = \rho_e, \quad (1.2)$$

где  $\vec{D} = \chi_0 \vec{E}$  - векторы индукции и напряженности электрического поля в вакууме;  $\rho_e$  - объемная плотность электрических зарядов на кольцевом электроде. Обозначая электрическую емкость электрода символом  $C_0$ , можем записать, что

$$\rho_e = C_0 U_0 / [\pi(R_2^2 - R_1^2)b], \quad \text{где}$$

$$V = \pi(R_2^2 - R_1^2)b - \text{объем электрода.}$$

Так как  $\vec{E} = -\text{grad} \Phi$ , где  $\Phi$  - электрический потенциал поля в вакууме, то уравнение (1.2) можно записать в следующем виде

$$\nabla^2 \Phi = - \frac{C_0 U_0}{\chi_0 \pi(R_2^2 - R_1^2)b} \xi(x_k), \quad (1.3)$$

где функция  $\xi(x_k)$  определяется следующим образом

$$\xi(x_k) = \begin{cases} 1 \forall x_k \in V, \\ 0 \forall x_k \notin V. \end{cases}$$

Решение уравнения (1.3) удобнее всего выполнить в цилиндрической системе координат  $(\rho, \phi, z)$ , координатные оси которой показаны на рис. 1. Очевидно, что решаемая задача обладает осевой симметрией, поэтому развернутая форма записи уравнения (1.3) имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 \Phi(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \Phi(\rho, z)}{\partial z^2} = - \frac{C_0 U_0}{\chi_0 \pi(R_2^2 - R_1^2)b} \xi(x_k), \quad (1.4)$$

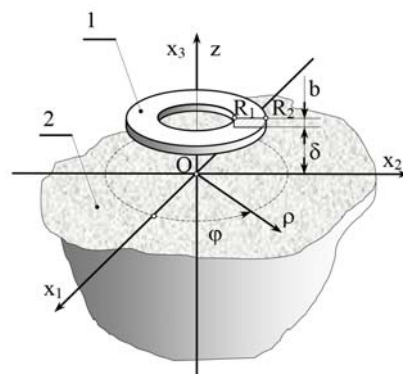


Рис.1. Расчетная схема объекта

Очевидно, что электрический потенциал  $\Phi(\rho, z)$  удовлетворяет условиям физической реализуемости источника поля, т. е. он сам и его производные обращаются в нуль в бесконечно удаленной от источника (электрода) точ-

ке. Это позволяет выполнить решение уравнения (1.4) с помощью интегрального преобразования Ханкеля [4] с ядром  $J_0(\gamma\rho)$ , где  $J_0(\gamma\rho)$  - функция Бесселя нулевого порядка;  $\gamma$  - параметр интегрального преобразования. Будем считать, что  $\gamma$  - действительное число.

Введем определение

$$\Phi(\gamma, z) = \int_0^{\infty} \rho \Phi(\rho, z) J_0(\gamma\rho) d\rho, \quad (1.5)$$

где  $\Phi(\gamma, z)$  - интегральный образ искомого потенциала  $\Phi(\rho, z)$ . Преобразование (1.5) называют прямым интегральным преобразованием Ханкеля. Так как интеграл (1.5) существует, то прямому преобразованию Ханкеля ставится в соответствие обратное преобразование следующего вида

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^{\infty} \gamma \Phi(\gamma, z) J_0(\gamma\rho) d\gamma. \quad (1.6)$$

Подвергая прямому интегральному преобразованию (1.5) левую и правую части уравнения (1.4), приводим его к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка следующего вида

$$\frac{\partial^2 \Phi(\gamma, z)}{\partial z^2} - \gamma^2 \Phi(\gamma, z) = -R(\gamma, z), \quad (1.7)$$

где

$$R(\gamma, z) = \frac{C_0 U_0}{\chi_0 \pi \left[ 1 - (R_1/R_2)^2 \right] b} \times \left[ J_1(\gamma R_2) - \frac{R_1}{R_2} J_1(\gamma R_1) \right] \xi(z); \quad (1.8)$$

$$\xi(z) = \begin{cases} 1 & \forall z \in [\delta, \delta + b], \\ 0 & \forall z \notin [\delta, \delta + b]. \end{cases}$$

Решение уравнения (1.7), которое в области  $z > 0$  удовлетворяет условиям физической реализуемости источника электрического поля, записывается следующим образом

$$\Phi(\gamma, z) = [A_0 + A(z)] e^{\gamma z} + [B + B(z)] e^{-\gamma z}, \quad (1.9)$$

где  $A_0 = \frac{C_0 U_0}{4\pi\chi_0\gamma} W(\gamma, \Gamma)$ ;  $W(\gamma, \Gamma)$  - функция влияния геометрических параметров (символ  $\Gamma$ ) источника на характер изменения электрического поля в окружающем пространстве; числовые значения этой функции определяются следующим выражением

$$W(\gamma, \Gamma) = \frac{2e^{-\gamma\delta}}{\left[ 1 - (R_1/R_2)^2 \right] (\gamma R_2)} \times \left[ J_1(\gamma R_2) - \frac{R_1}{R_2} J_1(\gamma R_1) \right] \frac{(1 - e^{-\gamma b})}{\gamma b}. \quad (1.10)$$

Варьируемые константы  $A(z)$  и  $B(z)$  рассчитываются по формулам

$$A(z) = -\frac{R(\gamma)}{2\gamma} \int_{\delta}^z e^{-\gamma x} dx; B(z) = \frac{R(\gamma)}{2\gamma} \int_{\delta}^z e^{\gamma x} dx, \quad (1.11)$$

$$R(\gamma) = \frac{C_0 U_0}{\chi_0 \pi b \left[ 1 - (R_1/R_2)^2 \right] (\gamma R_2)} \times \left[ J_1(\gamma R_2) - \frac{R_1}{R_2} J_1(\gamma R_1) \right]$$

константа  $B$  в соотношении (1.9) подлежит определению в ходе решения задачи.

Из определений (1.11) следует, что под кольцевым электродом, т. е. в области  $0 \leq z \leq \delta$ , выражение (1.9) принимает вид

$$\Phi(\gamma, z) = A_0 e^{\gamma z} + B e^{-\gamma z}. \quad (1.12)$$

Компоненты вектора напряженности  $\vec{E}(\rho, z)$  осесимметричного электрического поля в цилиндрической системе координат определяются следующими выражениями

$$E_\rho(\rho, z) = -\frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial \rho}, \quad (1.13)$$

$$E_z(\rho, z) = -\frac{\partial \Phi(\rho, z)}{\partial z}. \quad (1.14)$$

Определим интегральные образы радиального  $E_\rho(\rho, z)$  и аксиального  $E_z(\rho, z)$  компонентов вектора напряженности следующими соотношениями

$$E_\rho(\gamma, z) = \int_0^{\infty} \rho E_\rho(\rho, z) J_1(\gamma\rho) d\rho, \quad (1.15)$$

$$E_z(\gamma, z) = \int_0^{\infty} \rho E_z(\rho, z) J_0(\gamma\rho) d\rho, \quad (1.16)$$

где  $J_1(\gamma\rho)$  - функция Бесселя первого порядка.

Воздействуя на определение (1.13) интегральным преобразованием Ханкеля (1.15), а на выражение (1.14) - преобразованием (1.16), получаем следующие результаты:

$$E_\rho(\gamma, z) = \gamma \Phi(\gamma, z) = \gamma (A_0 e^{\gamma z} + B e^{-\gamma z}), \quad (1.17)$$

$$E_z(\gamma, z) = -\frac{\partial \Phi(\gamma, z)}{\partial z} = -\gamma(A_0 e^{\gamma z} - B e^{-\gamma z}). \quad (1.18)$$

Следует подчеркнуть, что выражения (1.17) и (1.18) справедливы в области  $0 \leq z \leq \delta$ , т. е. в вакууме под кольцевым электродом.

На границе раздела  $z = 0$  двух сред с различными электрическими свойствами должны выполняться условия сопряжения электрических полей в вакууме и диэлектрике. Эти условия в терминах интегральных образов компонентов векторов напряженности электрических полей записываются в следующем виде

$$E_p(\gamma, 0) = E_p^*(\gamma, 0), \quad (1.19)$$

$$\chi_0 E_z(\gamma, 0) = \chi_{33} E_z^*(\gamma, 0), \quad (1.20)$$

где величины  $E_p(\gamma, 0)$  и  $E_z(\gamma, 0)$  определяются соотношениями (1.17) и (1.18) при  $z = 0$ ;  $E_p^*(\gamma, 0)$  и  $E_z^*(\gamma, 0)$  - определенные при  $z = 0$  интегральные образы компонентов вектора напряженности электрического поля в объеме диэлектрика. При этом

$$E_p^*(\gamma, z) = \gamma \Phi^*(\gamma, z), E_z^*(\gamma, z) = -\frac{\partial \Phi^*(\gamma, z)}{\partial z}, \quad (1.21)$$

где  $\Phi^*(\gamma, z)$  - интегральный образ потенциала  $\Phi^*(\rho, z)$  электрического поля в диэлектрике.

Потенциал  $\Phi^*(\rho, z)$  удовлетворяет условию отсутствия свободных носителей электричества в объеме диэлектрика, которое в случае осевой симметрии записывается следующим образом

$$\chi_{11} \left[ \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right] + \chi_{33} \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (1.22)$$

Воздействуя на уравнение (1.22) интегральным преобразованием (1.5), приводим его к обыкновенному дифференциальному уравнению следующего вида

$$\frac{\partial^2 \Phi^*(\gamma, z)}{\partial z^2} - \zeta^2 \Phi^*(\gamma, z) = 0, \quad (1.23)$$

где параметр уравнения  $\zeta = \gamma \sqrt{\chi_{11}/\chi_{33}}$ .

Решение уравнения (1.23), которое удовлетворяет условиям физической реализуемости источника электрического поля в области  $-\infty < z \leq 0$ , записывается следующим образом

$$\Phi^*(\gamma, z) = C e^{\zeta z}, \quad (1.24)$$

где  $C$  - подлежащая определению константа.

Подставляя решение (1.24) в определения (1.21), получаем соотношения для расчета интегральных образов компонентов вектора напряженности электрического поля в объеме диэлектрического кристалла:

$$E_p^*(\gamma, z) = \gamma C e^{\zeta z}, E_z^*(\gamma, z) = -\zeta C e^{\zeta z}. \quad (1.25)$$

Константы  $B$  и  $C$ , которые входят в описания компонентов вектора напряженности электрических полей над диэлектриком (соотношения (1.17) и (1.18)) и в объеме диэлектрика (выражения (1.25)) определяются из граничных условий (1.19) и (1.20). Для константы  $C$  получаем следующую расчетную формулу

$$C = \frac{C_0 U_0}{2\pi\gamma(\chi_0 + \sqrt{\chi_{11}\chi_{33}})} W(\gamma, \Gamma). \quad (1.26)$$

Выполняя обратные преобразования Ханкеля, которые соответствуют прямым преобразованиям по формулам (1.15) и (1.16), получаем соотношения для расчета оригиналов функций  $E_p^*(\rho, z)$  и  $E_z^*(\rho, z)$

$$E_p^*(\rho, z) = \frac{C_0 U_0}{\pi(\chi_0 + \sqrt{\chi_{11}\chi_{33}}) R_2} \times \int_0^\infty W^*(\gamma, z) e^{\zeta z} J_1(\gamma \rho) d\gamma, \quad (1.27)$$

$$E_z^*(\rho, z) = -\frac{C_0 U_0}{\pi(\chi_0 + \sqrt{\chi_{11}\chi_{33}}) R_2} \times \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \int_0^\infty W^*(\gamma, z) e^{\zeta z} J_0(\gamma \rho) d\gamma, \quad (1.28)$$

где

$$W^*(\gamma, \Gamma) = \frac{e^{-\gamma \delta}}{\left[1 - (R_1/R_2)^2\right]} \times \left[ J_1(\gamma R_2) - \frac{R_1}{R_2} J_1(\gamma R_1) \right] \frac{(1 - e^{-\gamma b})}{\gamma b}.$$

Очевидно, что значения интегралов в формулах (1.27) и (1.28) определяются численными методами, т. е. прямыми вычислениями на компьютере.

На рис. 2 показаны графики изменения радиального (рис. 2,а) и аксиального (рис. 2,б) компонентов вектора напряженности электрического поля на поверхности и в объеме  $Z$  - среза кристалла ниобата лития ( $\text{LiNbO}_3$ ) с

диэлектрическими проницаемостями  $\chi_{11} = 38,9 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\chi_{33} = 25,7 \cdot 10^{-12}$  Ф/м [1]. По осям ординат на рис. 2 отложены числовые значения нормированных на постоянный множитель  $E_0 = C_0 U_0 / \left[ \pi (\chi_0 + \sqrt{\chi_{11} \chi_{33}}) R_2^2 \right]$  радиального  $E_r^*(\rho, z)/E_0$  и аксиального  $E_z^*(\rho, z)/E_0$  компонентов вектора напряженности электрического поля. По осям абсцисс отсчитывается

безразмерная радиальная координата  $\rho/R_2$ . Расчеты были выполнены для следующего набора геометрических параметров:  $\delta/R_2 = 0$ ,  $b/R_2 = 0,01$ ,  $R_1/R_2 = 0,4$ . Варьируемым параметром показанного на рис. 2 семейства кривых является безразмерная аксиальная координата  $z/R_2$ , числовые значения которой проставлены в поле рисунков возле соответствующих кривых.

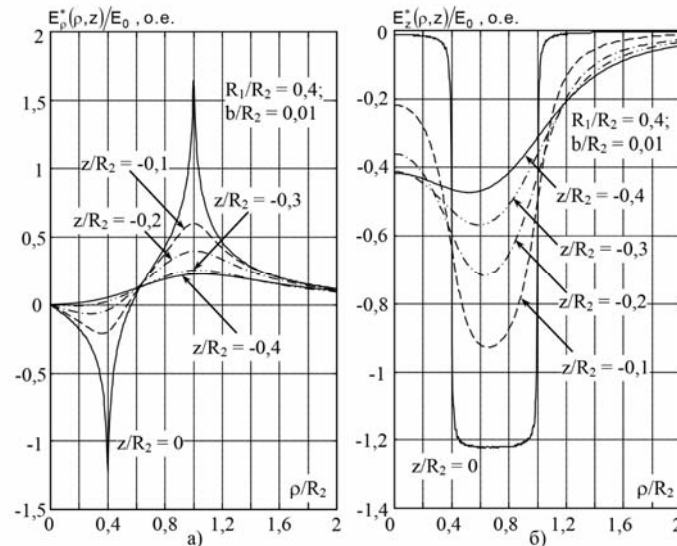


Рис. 2. Графики радиального (а) и аксиального (б) компонентов вектора напряженности электрического поля в объеме  $\text{LiNbO}_3$  под заряженным положительным зарядом кольцевым электродом

На рис. 3 показаны результаты расчетов нормированных компонентов вектора напряженности электрического поля, которое создается на поверхности и в объеме кристалла ниобата лития более узким ( $R_1/R_2 = 0,8$ ) кольцевым электродом. При этом, как и в предыдущей серии расчетов, кольцевой электрод толщиной  $b/R_2 = 0,01$  располагается на поверхности кристалла ( $\delta/R_2 = 0$ ). Сопоставляя между собой кривые, показанные на рис. 2 и рис. 3 легко заметить следующие отличия и общие черты. Во-первых, более узкий электрод создает электрическое поле с несколько меньшими максимальными значениями компонентов вектора напряженности электрического поля. Во-вторых, напряженность электрического поля под узким электродом убывает быстрее при погружении вглубь кристалла, чем напряженность электрического поля под широким электродом. В-третьих, радиальные размеры области за пределами внешнего радиуса кольца, в которой напряженность электрического поля кольцевого электрода принимает заметные значения, не превышают две, максимум три, ширины кольца.

Два последних заключения позволяют утверждать, что электрическое поле кольцевого электрода сосредоточено в сравнительно небольшой области, которая по глубине не превышает размера внешнего радиуса кольца (параметр  $R_2$ ), а по радиусу занимает область от нуля до  $\rho = 3R_2$ . При  $\rho > 3R_2$  напряженность электрического поля кольцевого электрода уменьшается практически на два порядка, по сравнению с теми значениями, которые наблюдаются под кольцом.

## 2. Поверхностные и объемные плотности сил Кулона

Обобщенный закон Гука для пьезоэлектриков в линейном приближении записывается в следующем виде [5]

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (2.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  - результирующее механическое напряжение;  $c_{ijkl}^E$  - модуль упругости, экспериментально определенный в режиме постоянства (равенства нулю) напряженности электрического

го поля;  $\varepsilon_{kl}$  - компонент тензора упругих деформаций;  $e_{kij}$  - пьезомодуль (размерность - кулон, деленный на метр квадратный);  $E_k$  - k-ый компонент вектора напряженности результирующего электрического поля. При этом  $E_k = E_k^* + E_k^{in}$ , где  $E_k^*$  - k-ый компонент вектора напряженности электрического поля, созданного электродными структурами, т. е. внешними, по отношению к пьезоэлектрику, устройствами;  $E_k^{in}$  - компонент вектора напряженности внутреннего электрического поля, которое возникает в деформируемом пьезоэлектрике из-за смещения ионов из узлов кристаллической решетки. Для природных (монокристаллических) пьезоэлектриков всегда выполняется сильное не-

равенство  $|\vec{E}^*| \gg |\vec{E}^{in}|$ , и поэтому, в первом приближении, можно считать, что  $E_k \cong E_k^*$ .

В этом случае соотношение (2.1), которое очень часто называют уравнением физического состояния пьезоэлектрика, можно записать в следующем, более наглядном, виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\Gamma - \sigma_{ij}^K, \quad (2.2)$$

где  $\sigma_{ij}^\Gamma = c_{ij\alpha\beta}^E \varepsilon_{\alpha\beta}$  - силы упругости или гуковская составляющая результирующих напряжений  $\sigma_{ij}$ ;  $\sigma_{ij}^K = e_{kij} E_k^*$  - кулоновская составляющая результирующих напряжений. Очевидно, что составляющие  $\sigma_{ij}^\Gamma$  и  $\sigma_{ij}^K$  соотносятся друг с другом как силы действия и силы противодействия.

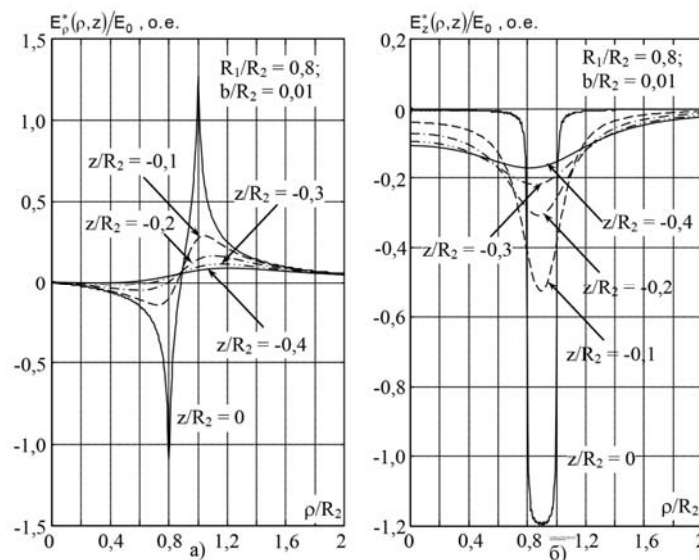


Рис. 3. Графики радиального (а) и аксиального (б) компонентов вектора напряженности электрического поля на поверхности и в объеме LiNbO<sub>3</sub> под узким кольцевым электродом

Очевидно, что кулоновская составляющая  $\sigma_{ij}^K$  в обобщенном законе Гука (2.2) играет роль внешних сил, которые порождают деформации  $\varepsilon_{kl}$ . Уровни деформаций в пренебрежении силами инерции, т. е. в статическом приближении, определяются из условия  $\sigma_{ij} = 0$ . В том случае, когда кулоновские напряжения  $\sigma_{ij}^K$  изменяются во времени, определение количественных характеристик компонентов тензора деформации малых объемов пьезоэлектрического кристалла существенно усложняется. Вместе с тем, по характеру изменения кулоновских сил в пространстве можно выполнить физически содержательные качественные оценки напряженно дефор-

мированного состояния пьезоэлектрического кристалла.

Из определения поверхностной плотности  $\sigma_{ij}^K$  сил Кулона следует, что их качественные и количественные характеристики определяются, с одной стороны, источником электрического поля, конструкция которого определяет компоненты вектора напряженности  $E_k^*(x_k)$  электрического поля, а с другой стороны – свойствами пьезоэлектрика, т. е. структурой матрицы пьезоэлектрических модулей.

Для Z – среза ниобата лития (LiNbO<sub>3</sub>, кристаллографический класс 3m) матрица пьезоэлектрических модулей  $e_{k\beta}$  ( $\beta \Leftrightarrow i, j$  - индекс Фойгта) имеет следующий вид [1]:

$$e_{k\beta} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & e_{16} \\ e_{21} & e_{22} & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (2.3)$$

где  $e_{15} = e_{24} = 3,7 \text{ Кл/м}^2$ ;

$e_{22} = -e_{21} = -e_{16} = 2,5 \text{ Кл/м}^2$ ;

$e_{31} = e_{32} = 0,2 \text{ Кл/м}^2$ ;  $e_{33} = 1,3 \text{ Кл/м}^2$ .

Так символ радиальной оси цилиндрической системы координат эквивалентен символу первой оси ( $x_1$ ) праввинтовой декартовой системы координат, т. е. единице, а символ  $z$  - тройке [6], то выражения для расчета поверхностных плотностей сил Кулона, которые формирует в пьезоэлектрике кольцевой электрод, имеют следующий вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^K(\rho, z) &= \sigma_{\phi\phi}^K(\rho, z) = e_{31}E_z^*(\rho, z) = \\ &= -e_{31}E_0 \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \int_0^\infty W^*(\gamma, \Gamma) e^{\zeta z} J_0(\gamma\rho) d(\gamma R_2), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho z}^K(\rho, z) &= \sigma_{z\rho}^K(\rho, z) = e_{15}E_\rho^*(\rho, z) = \\ &= e_{15}E_0 \int_0^\infty W^*(\gamma, \Gamma) e^{\zeta z} J_1(\gamma\rho) d(\gamma R_2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^K(\rho, z) &= e_{33}E_z^*(\rho, z) = \\ &= -e_{33}E_0 \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \int_0^\infty W^*(\gamma, \Gamma) e^{\zeta z} J_0(\gamma\rho) d(\gamma R_2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $E_0 = C_0 U_0 / \left[ \pi(\chi_0 + \sqrt{\chi_{11}\chi_{33}}) R_2^2 \right]$  - постоянный размерный множитель.

Объемные плотности  $f_\beta^K(\rho, z)$  ( $\beta = \rho, z$ ) сил Кулона определяются через осесимметричные составляющие  $\sigma_{\lambda\beta}^K(\rho, z)$  ( $\lambda, \beta = \rho, z$ ) поверхностных плотностей следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} f_\rho^K(\rho, z) &= \frac{\partial \sigma_{\rho\rho}^K(\rho, z)}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{\rho z}^K(\rho, z)}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \left[ \sigma_{\rho\rho}^K(\rho, z) - \sigma_{\phi\phi}^K(\rho, z) \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} f_z^K(\rho, z) &= \frac{\partial \sigma_{\rho z}^K(\rho, z)}{\partial \rho} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \sigma_{\rho z}^K(\rho, z) + \frac{\partial \sigma_{zz}^K(\rho, z)}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставляя соотношения (2.4) – (2.6) в определения (2.7), (2.8), получаем следующие расчетные формулы

$$\begin{aligned} f_\rho^K(\rho, z) &= \frac{E_0}{R_2} (e_{31} + e_{15}) \times \\ &\times \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \int_0^\infty (\gamma R_2) W^*(\gamma, \Gamma) e^{\zeta z} J_1(\gamma\rho) d(\gamma R_2), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} f_z^K(\rho, z) &= \frac{E_0}{R_2} \left( e_{15} - e_{33} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} \right) \times \\ &\times \int_0^\infty (\gamma R_2) W^*(\gamma, \Gamma) e^{\zeta z} J_0(\gamma\rho) d(\gamma R_2). \end{aligned} \quad (2.10)$$

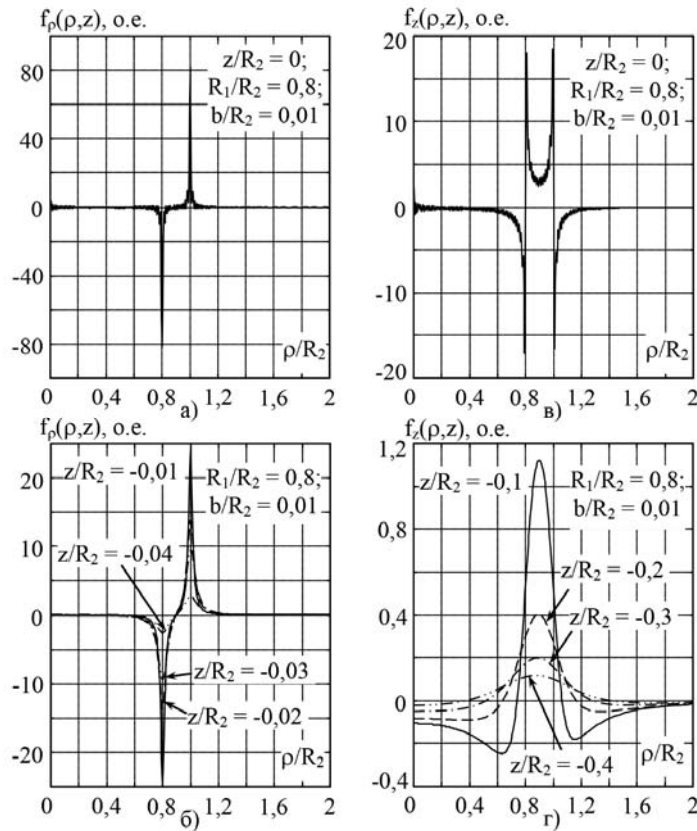
Источниками распространяющихся ультразвуковых волн являются поверхностные плотности сил Кулона  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$  и  $\sigma_{zz}^K(\rho, 0)$  и объемные плотности сил  $f_\rho^K(\rho, z)$  и  $f_z^K(\rho, z)$ . Указанная совокупность силовых факторов формирует радиально распространяющиеся поверхностные акустические волны и уходящие вглубь кристалла сферические продольные и сдвиговые (поперечные) волны.

Характер изменения в пространстве поверхностных нагрузок  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$  и  $\sigma_{zz}^K(\rho, 0)$  определяется выражениями (2.5) и (2.6) при  $z = 0$  и отличается от показанных на рис. 2 и рис. 3 графиков изменения радиального и аксиального компонентов вектора напряженности электрического поля на поверхности диэлектрического кристалла только лишь масштабирующими множителями  $e_{15}E_0$  для касательных нагрузок  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$  и  $e_{33}E_0$  для нормального напряжения  $\sigma_{zz}^K(\rho, 0)$ . Для  $Z$  – среза  $\text{LiNbO}_3$  отношение этих множителей прямо пропорционально отношению пьезомодулей  $e_{15}/e_{33} \approx 2,85$ , откуда следует, что электрическое поле кольцевого электрода создает поверхностные плотности сил Кулона, которые генерируют в  $Z$ -срезе ниобата лития преимущественно поперечные сферические волны.

На рис. 4 показаны графики изменения в пространстве объемных плотностей радиального  $f_\rho(\rho, z) = f_\rho^K(\rho, z) R_2 / E_0$  (рис. 4, а, б) и аксиального  $f_z(\rho, z) = f_z^K(\rho, z) R_2 / E_0$  (рис. 4, в, г) компонентов вектора объемной плотности сил Кулона. По осям ординат на рис. 4 отсчитываются значения безразмерных компонентов вектора объемной плотности сил Кулона в относитель-

ных единицах, по осям абсцисс – значения безразмерной радиальной координаты  $\rho/R_2$ . Значения безразмерной аксиальной координаты проставлены в поле рисунков возле соответ-

ствующих кривых. Осцилляции значений безразмерных величин  $f_\rho(\rho, z)$  и  $f_z(\rho, z)$  при  $z = 0$  обусловлены погрешностями числового определения обратных преобразований Ханкеля.



**Рис. 4.** Графики изменения радиального (а,б) и аксиального (в,г) компонентов объемной плотности сил Кулона при погружении вглубь Z - среза кристалла LiNbO<sub>3</sub>

Легко заметить, что объемные плотности сил Кулона очень быстро убывают по мере погружения вглубь кристалла. Так, радиальный компонент  $f_\rho^K(\rho, z)$  уменьшается на порядок в слое толщиной всего лишь  $0,04R_2$ . Максимальные значения результирующей радиальной составляющей силы Кулона, которая действует в этом слое

$$\max_{R_p} R_p^K = \max_{f_\rho^K} f_\rho^K(\rho, 0) \cdot 0,04R_2/2 \approx 80 \cdot 0,02E_0 \approx 1,6E_0,$$

т. е. практически равны максимальным значениям радиального компонента вектора напряженности электрического поля на поверхности кристалла. Если сравнить площади под кривой распределения объемной плотности  $f_\rho^K(\rho, 0)$ , умноженной на произведение  $0,02R_2$ , и поверхностной нагрузки  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0) = e_{15}E_\rho^*(\rho, 0)$ , то можно сделать вполне очевидный вывод, что

касательное напряжение  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$  является доминирующим силовым фактором в процессе возбуждения поперечных сферических волн. Энергосодержание радиального компонента вектора объемной плотности сил Кулона на порядок меньше энергоемкости поверхностных нагрузок  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$ . Аналогичный вывод можно сделать из анализа результатов, которые представлены графически на рис. 4, в, г.

Таким образом, можно сделать вывод, что доминирующим силовым фактором при возбуждении электрическим полем кольцевого электрода продольных и поперечных волн являются поверхностные нагрузки  $\sigma_{zz}^K(\rho, 0)$  и  $\sigma_{z\rho}^K(\rho, 0)$ . При первичной оценке амплитуд возбуждаемых объемных волн можно, в первом приближении, не принимать во внимания сам факт существования сил Кулона в объеме пьезоэлектрического кристалла.



### 3. Скалярный и векторный потенциалы поля сил Кулона

В работе [2] показано, что скалярный  $\Phi^*(\rho, \phi, z)$  и векторный  $\bar{\Psi}^*(\rho, \phi, z)$  потенциалы поля сил Кулона  $\bar{f}^K(\rho, \phi, z)$  являются решениями следующих дифференциальных уравнений:

$$\nabla^2 \Phi^*(\rho, \phi, z) = \text{div } \bar{f}^K(\rho, \phi, z), \quad (3.1)$$

$$\text{rot rot } \bar{\Psi}^*(\rho, \phi, z) = \text{rot } \bar{f}^K(\rho, \phi, z), \quad (3.2)$$

$$\text{при условии, что } \text{div } \bar{\Psi}^*(\rho, \phi, z) = 0. \quad (3.3)$$

Определенные соотношениями (3.1) – (3.3) потенциалы формируют амплитудные значения продольных (скалярный потенциал) и сдвиговых (векторный потенциал) не взаимодействующих объемных волн, и являются элементами представления Гельмгольца вектора объемной плотности сил Кулона, т. е.

$$\bar{f}^K(\rho, \phi, z) = \text{grad } \Phi^*(\rho, \phi, z) + \text{rot } \bar{\Psi}^*(\rho, \phi, z), \quad (3.4)$$

В случае осевой симметрии силового поля, т. е. когда вектор объемной плотности  $\bar{f}^K(\rho, z) = \bar{e}_\rho f_\rho^K(\rho, z) + \bar{e}_z f_z^K(\rho, z)$ , где  $\bar{e}_\rho$  и  $\bar{e}_z$  – единичные векторы (орты) цилиндрической системы координат, векторный потенциал  $\bar{\Psi}^*(\rho, z)$  полностью определяется окружным компонентом  $\Psi_\phi^*(\rho, z)$ . Уравнения (3.1) и (3.2) в развернутом виде записываются следующим образом

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho f_\rho^K(\rho, z) \right] + \frac{\partial f_z^K(\rho, z)}{\partial z}, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} -$$

$$- \frac{1}{\rho^2} \Psi_\phi^*(\rho, z) + \frac{\partial^2 \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial z^2} =$$

$$= - \frac{\partial f_\rho^K(\rho, z)}{\partial z} + \frac{\partial f_z^K(\rho, z)}{\partial \rho}. \quad (3.6)$$

Так как компоненты вектора объемной плотности сил Кулона удовлетворяют условиям физической реализуемости, т. е. удовлетворяют предельным условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r f_\beta^K(\rho, z), r \frac{\partial f_\beta^K(\rho, z)}{\partial \beta} \right] = 0, \quad \beta = \rho, z,$$

где  $r = \sqrt{\rho^2 + z^2}$  – расстояние от источника силового поля, то порождающие их потенциалы также должны удовлетворять аналогичным предельным условиям. Поскольку потенциалы  $\Phi^*(\rho, z)$  и  $\bar{\Psi}^*(\rho, z)$  удовлетворяют предельным условиям

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \Phi^*(\rho, z), r \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \beta}, r \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial \beta^2} \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ r \Psi_\phi^*(\rho, z), r \frac{\partial \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial \beta}, r \frac{\partial^2 \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial \beta^2} \right] = 0,$$

$\beta = \rho, z$ , постольку для решения уравнений (3.5) и (3.6) можно применить метод интегральных преобразований [4].

Определим интегральные образы искомых потенциалов  $\Phi^*(\rho, z)$  и  $\bar{\Psi}^*(\rho, z)$  следующими соотношениями

$$\Phi^*(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho \Phi^*(\rho, z) J_0(\gamma \rho) d\rho, \quad (3.7)$$

$$\Psi_\phi^*(\gamma, z) = \int_0^\infty \rho \Psi_\phi^*(\rho, z) J_1(\gamma \rho) d\rho. \quad (3.8)$$

При этом

$$\Phi^*(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma \Phi^*(\gamma, z) J_0(\gamma \rho) d\gamma, \quad (3.9)$$

$$\Psi_\phi^*(\rho, z) = \int_0^\infty \gamma \Psi_\phi^*(\gamma, z) J_1(\gamma \rho) d\gamma. \quad (3.10)$$

Воздействуя на левую и правую части уравнения (3.5) интегральным преобразованием Ханкеля (3.7), и подвергая преобразованию (3.8) уравнение (3.6), получаем два одинаковых по конструкции обыкновенных дифференциальных уравнения следующего вида

$$\frac{d^2 \Phi^*(\gamma, z)}{dz^2} - \gamma^2 \Phi^*(\gamma, z) = F_0^* e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma), \quad (3.11)$$

$$\frac{d^2 \Psi_\phi^*(\gamma, z)}{dz^2} - \gamma^2 \Psi_\phi^*(\gamma, z) = -R_0^* e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma), \quad (3.12)$$

где  $P_0^* = E_0 R_2 \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \left( e_{31} + 2e_{15} - e_{33} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} \right)$ ,

$$\Psi_\phi^*(\gamma, z) = -\frac{\chi_{33}}{\chi_{11} - \chi_{33}} R_0^* \frac{e^{\zeta z}}{\gamma} W^*(\gamma, \Gamma). \quad (3.16)$$

$$R_0^* = E_0 R_2 \left[ (e_{31} - e_{33}) \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} + e_{15} \left( \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} + 1 \right) \right].$$

При записи соотношений для расчета величин  $P_0^*$  и  $R_0^*$  использовались матрицы материальных констант Z-среза ниобата лития (LiNbO<sub>3</sub>).

Решения обыкновенных дифференциальных уравнений (3.11) и (3.12) выполняются по стандартной схеме вариации постоянных [3], и для области  $z < 0$  записываются в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi^*(\gamma, z) &= Ae^{\gamma z} - P_0^* W^*(\gamma, \Gamma) \times \\ &\times \int_{-\infty}^z e^{\zeta x} \text{sh}[\gamma(x-z)] dx, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\phi^*(\gamma, z) &= Be^{\gamma z} + R_0^* W^*(\gamma, \Gamma) \times \\ &\times \int_{-\infty}^z e^{\zeta x} \text{sh}[\gamma(x-z)] dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Так как интегральные образы компонентов вектора объемной плотности сил Кулона зависят от переменной  $z$  как  $e^{\zeta z}$  (см. подынтегральные выражения в формулах (2.9) и (2.10)), то для выполнения равенства (3.4) необходимо и достаточно в общих решениях (3.13) и (3.14) положить  $A = B = 0$ . После выполнения интегрирования в формулах (3.13) и (3.14), получаем следующие определения интегральных образов  $\Phi^*(\gamma, z)$  и  $\Psi_\phi^*(\gamma, z)$ :

$$\Phi^*(\gamma, z) = \frac{\chi_{33}}{\chi_{11} - \chi_{33}} P_0^* \frac{e^{\zeta z}}{\gamma} W^*(\gamma, \Gamma), \quad (3.15)$$

Подставляя выражения (3.15) и (3.16) в обратные преобразования Ханкеля (3.9) и (3.10), получаем окончательный вид выражений для расчета потенциалов осесимметричного поля сил Кулона:

$$\begin{aligned} \Phi^*(\rho, z) &= \frac{\chi_{33} P_0^*}{(\chi_{11} - \chi_{33}) R_2} \times \\ &\times \int_0^\infty e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma) J_0(\gamma \rho) d(\gamma R_2), \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \Psi_\phi^*(\rho, z) &= -\frac{\chi_{33} R_0^*}{(\chi_{11} - \chi_{33}) R_2} \times \\ &\times \int_0^\infty e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma) J_1(\gamma \rho) d(\gamma R_2). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сравнивая выражения (3.17) и (3.18) с расчетными формулами (1.27) и (1.28), можно прийти к выводу, что скалярный потенциал (с точностью до знака) изменяется в пространстве так же как и аксиальный компонент  $E_z^*(\rho, z)$ .

Векторный потенциал  $\Psi_\phi^*(\rho, z)$  изменяется в пространстве так же как радиальный компонент  $E_\rho^*(\rho, z)$  вектора напряженности переменного электрического поля в объеме кристалла ниобата лития.

Прямыми вычислениями можно показать, что потенциалы, заданные соотношениями (3.17) и (3.18), удовлетворяют разложению Гельмгольца (3.4). Докажем справедливость этого утверждения на примере радиального компонента  $f_\rho^K(\rho, z)$  вектора объемной плотности сил Кулона. В соответствии с определением (3.4)

$$\begin{aligned} f_\rho^K(\rho, z) &= \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{\partial \Psi_\phi^*(\rho, z)}{\partial z} = -\frac{\chi_{33} P_0^*}{(\chi_{11} - \chi_{33}) R_2^2} \int_0^\infty (\gamma R_2) e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma) J_1(\gamma \rho) d(\gamma R_2) + \\ &+ \frac{\chi_{33} R_0^*}{(\chi_{11} - \chi_{33}) R_2^2} \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \int_0^\infty (\gamma R_2) e^{\zeta z} W^*(\gamma, \Gamma) J_1(\gamma \rho) d(\gamma R_2). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Так как

$$\begin{aligned} -P_0^* + R_0^* \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} &= E_0 R_2 \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \left( -e_{31} - 2e_{15} + e_{33} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} + e_{31} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} - e_{33} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} + e_{15} \frac{\chi_{11}}{\chi_{33}} + e_{15} \right) = \\ &= -E_0 R_2 \sqrt{\frac{\chi_{11}}{\chi_{33}}} \frac{(\chi_{11} - \chi_{33})}{\chi_{33}} (e_{31} + e_{15}), \end{aligned}$$

то, подставляя последний результат в соотношение (3.19), получаем выражение (2.9), которое определяет радиальный компонент вектора объемной плотности сил Кулона, которые формируются в Z-срезе ниобата лития электрическим полем кольцевого электрода.

### Выводы

Подводя итоги вышеизложенному, можно сформулировать следующие выводы.

1. С помощью интегральных преобразований Ханкеля получено и исследовано решение граничной задачи об электрическом поле, которое создается в объеме анизотропного по диэлектрической проницаемости пьезоэлектрического кристалла кольцевым электродом, находящимся на его поверхности.

2. Определены и исследованы поверхностные и объемные плотности сил Кулона, которые создаются электрическим полем кольцевого электрода в Z – срезе ниобата лития. Показано, что деформирующие пьезоэлектрический кристалл силы Кулона существуют в конечном объеме ограниченном полусферой, радиус которой не превышает двух, максимум трех, наружных радиусов кольцевого электрода.

3. Определены скалярный и векторный потенциалы поля сил Кулона, что позволяет оценить вклады объемных сил в энергетику возбуждаемых продольных и поперечных волн.

### Список использованных источников

1. Royer D., Dieulesaint E. Elastic Waves in Solids. V. II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – 446 p.
2. Богдан А.В., Михеева А.Н., Петрищев О.Н. Принципы математического моделирования акустооптических ячеек // Электроника и связь, 2015, Т. 20, № 2, С. 46 – 57.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
4. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970. – 710 с.
5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. – М.: Мир, 1986. – 160 с.
6. Петрищев О.Н. Гармонические колебания пьезокерамических элементов. Часть 1. Гармонические колебания пьезокерамических элементов в вакууме и метод резонанса – антирезонанса. Киев: Аверс, 2012. – 300 с.
7. Тамм И. Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976. – 616 с.

Поступила в редакцию 20 мая 2015 г.

УДК 535:534.232-8

**А.В. Богдан**<sup>1</sup>, кан. техн. наук, **А.Н. Михеева**<sup>2</sup>, **О.Н. Петрищев**<sup>2</sup>, д.-р. техн. наук

<sup>1</sup>Науково-дослідний інститут прикладної електроніки,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

<sup>2</sup>Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»,

вул. Політехнічна, 16, корпус 12, м. Київ, 03056, Україна.

## Дослідження характеристик силових полів джерел пружних хвиль в оптично прозорих п'єзоелектричних кристаллах

За допомогою інтегральних перетворень Ханкеля отримано і досліджено рішення граничної задачі про електричне поле, яке створюється в обсязі анізотропного за діелектричною проникністю п'єзоелектричного кристала кільцевим електродом, що знаходиться на його поверхні. Визначено та досліджено поверхневі та об'ємні щільності сил Кулона, які створюються електричним полем кільцевого електрода в Z - зрізі ніобата літію. Показано, сили Кулона, які деформують п'єзоелектричний кристал, існують в кінцевому обсязі обмеженому напівсферою, радіус якої не перевищує двох, максимум трьох, зовнішніх радіусів кільцевого електрода. Визначено скалярний і векторний потенціали поля сил Кулона, що дозволяє оцінити вклади об'ємних сил в енергетику збуджуваних поздовжніх і поперечних хвиль. Бібл. 7, рис. 4.

**Ключові слова:** акустооптика; математична модель; поздовжня хвиля; силове поле; електрод; ультразвуковий перетворювач.

UDC 534.131.1:534.232.082.73

**A. Bohdan**<sup>1</sup>, Ph.D., **A. Mykheeva**<sup>2</sup>, **O. Petryshchev**<sup>2</sup>, Dr.Sc.

<sup>1</sup>Research Institute of applied electronics, st. Polytechnique, 16, Kyiv, Ukraine, 03056.

<sup>2</sup>National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”,  
st. Polytechnique, 16, Kyiv, Ukraine, 03056.

## Study of the characteristics of force fields sources of elastic waves in optically transparent piezoelectric crystal

*With the help of Hankel integral transforms was received and investigated solution of the boundary problem of the electric field, which is created in the volume of anisotropic permittivity by a piezoelectric crystal in form of annular electrode located on the surface. It was identified and studied surface and bulk densities of Coulomb forces that are generated by the electric field of annular electrode in Z-cut of lithium niobate. It is shown that Coulomb forces deforming piezoelectric crystal exist in a final volume limited by hemisphere, the radius of which is not more than two-three outer radii of the annular electrode. Scalar and vector potentials of Coulomb force field was identified that allows to estimate the contributions of body forces in the energy of the excited longitudinal and transverse waves. References 7, figures 4.*

**Keywords:** acousto-optics; mathematical model; longitudinal wave; force field; electrode; ultrasonic transducer.

### References

1. Royer, D., Dieulesaint, E. (2000). Elastic Waves in Solids. V. II. Generation, Acousto-optic Interaction, Applications. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, P. 446.
2. Bohdan, A. V., Mikheeva, A. N., Petryshchev, O. N. (2015). Principles of acousto-optical cells mathematical modeling. Electronics and communications. Vol. 20, No 2, pp. 46 – 57. (Rus)
3. Kamke, E. (1976). Handbook on ordinary differential equations. Moscow, Nauka. P. 576 . (Rus)
4. Koshlyakov, N. S., Gliner, E. B., Smirnov, M. M. (1970). Partial differential equations of mathematical physics. Moscow, Vysshaya shkola. P. 710 . (Rus)
5. Novatskiy, V. (1986). Electromagnetic effects in solids. Moscow, Mir. P. 160. (Rus)
6. Petryshchev, O. N. (2012). Harmonic oscillations of piezoceramic elements. Harmonic oscillations of piezoelectric elements in a vacuum and the method of resonance-antiresonance. Kiev, Avers. P. 299 (Rus)
7. Tamm, I. E. (1976). Fundamentals of the theory of electricity. Moscow, Nauka. P. 616. (Rus)