

Акустичні прилади та системи

УДК 539.3: 537.226.86: 534.1

DOI [10.20535/2312-1807.2017.22.2.93918](https://doi.org/10.20535/2312-1807.2017.22.2.93918)**Карлаш В. Л.**, д.т.н., OrCID [0000-0001-7491-1729](https://orcid.org/0000-0001-7491-1729),e-mail: karlashv@ukr.net**Безверхий О. І.**, д.ф.-м.н., OrCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335),e-mail: o_bezver@ukr.net**Зінчук Л. П.**, к.ф.-м.н., OrCID [0000-0003-4615-9837](https://orcid.org/0000-0003-4615-9837),e-mail: zinchuk_imech@ukr.net

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

ВИМУШЕНІ ЕЛЕКТРОПРУЖНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНИХ ПЛАСТИН І СТРИЖНІВ ІЗ РОЗДІЛЕНИМИ ЕЛЕКТРОДАМИ.

ЧАСТИНА І: АНАЛІТИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ЗВ'ЯЗКУ І КОМПОНЕНТІВ ПОВНОЇ ПРОВІДНОСТІ

Стаття присвячена аналізу вимушених коливань нерівномірно навантажених перетворювачів, таких як пластини-стрижні із товщиною поляризацією при одному або двох двосторонніх розрізах електродного покриття, тонкі диски й кругові кільця з суцільними й розділеними концентричними та діаметральними розрізами електродів, а також частково електродованих пластин. У першій частині наведені аналітичні співвідношення, якими описуються радіальні коливання тонких п'єзокерамічних дисків із неповними електродами та поздовжні коливання стрижнів із неоднорідним електричним навантаженням. У другій частині наведені експериментальні дані для поздовжніх коливань стрижнів-пластин з розділеними або частковими електродами.

Бібл. 74, рис. 1

Ключові слова: п'єзокерамічні пластини та стрижні; розділені електроди; нерівномірне електричне навантаження; коефіцієнт електромеханічного зв'язку; вхідний адмітанс.

Вступ. Коливання п'єзокерамічних елементів конструкцій характеризуються високими коефіцієнтами електромеханічного зв'язку і значними амплітудами механічних напружень та зміщень [1 – 6]. Сама природа внутрішніх фізичних процесів у таких тілах призводить до того, що і зміщення, і напруження, і провідність, і імпеданс, і миттєва потужність мають біля резонансних частот як активні, так і реактивні компоненти. Ось чому, щоб розрахувати будь-яку амплітуду, треба брати до уваги втрати енергії [7 – 12].

Електромеханічні коливання збуджуються в п'єзокерамічних елементах за допомогою електричного поля, яке створюється електричною напругою, прикладеною до розміщених на його поверхні електродів. Товщина електродного покриття незначна (лише кілька сотень ангстремів), тому, як правило, його маса в розрахунках до уваги не береться. Досліди вчених показали, що форма

і положення електродного покриття істотно впливають на електромеханічні характеристики перетворювачів [13 – 15]. Власна між-електродна ємність п'єзокерамічних елементів іноді досягає кільканадцяти нанофарадів і істотно впливає на внутрішні електромеханічні процеси в них [1, 3 – 6].

Ефективність перетворення електричної енергії в механічну й навпаки у п'єзоелектричних електромеханічних акустичних перетворювачах (резонаторах, трансформаторах, фільтрах частот тощо) залежить, насамперед, від матеріалу і геометричної форми перетворювача, а також від форми й положення електродного покриття [3 – 6, 10, 16].

П'єзоелектричні пластини та стрижні із кварцу, турмаліну, сегнетової солі тощо інтенсивно досліджувалися ще на початку ХХ ст. Детальний огляд публікацій з цього питання подано в монографії У. Кеді [17]. Встановлено, зокрема, що для



найбільш ефективного електричного збудження основної поздовжньої моди $L1$ тонкого стрижня необхідно залишати біля його торців безелектродні ділянки, так щоб довжина електродного покриття становила три чверті від загальної довжини пластини. Досліджуючи коливання кварцових пластин із розділеними електродами, Д. Дай [18] помітив дивне явище — між електродами, коли один із них не був приєднаним до інших, часом виникало якесь світіння повітря, схоже на тліючий електричний розряд. То був перший у світі високовольтний п'єзотрансформатор, хоча до винаходу С. Розена [19] ще залишалося майже 30 років!

Протягом неповних ста літ, які минули від піонерських робіт [20 – 24], з'явилося чимало публікацій, в котрих описувалися різні способи управління ефективністю перетворення енергії в п'єзоелектричних тілах. Їх перелік зайняв би не одну сторінку, та все ж на кількох варто зупинитися. У працях [25 – 32] розглянуті трансформатори і резонатори з розділеними або неповними електродами й досліджено вплив положення границі розділення областей на динамічний коефіцієнт електромеханічного зв'язку (КЕМЗ).

У праці [25] розраховані й експериментально верифіковані коефіцієнти електромеханічного зв'язку для частково електродованих стрижнів, дисків і кругових кілець із товщиною поляризацією, а також для поздовжньо поляризованих стрижнів із заглибленими електродами. В роботі [21] досліджені кругові кільцеві п'єзотрансформатори з концентричними електродами, однорідно поляризовані по товщині (п'єзокераміка PZT типу APC841, внутрішній діаметр кільця $d = 20$ мм, зовнішній $D = 50$ мм, товщина $t = 6$ мм). Встановлено, зокрема, що п'єзотрансформатори такого типу демонструють значні коефіцієнти трансформації (до 100 одиниць і більше в режимі холостого ходу на першому радіальному обертоні) й можуть працювати при відносно низьких резистивних навантаженнях ($0,1 \div 5$ кОмів). Оптимальне відношення електродних діаметрів $d1/D = 0,70$ ($d1$ – границя областей п'єзотрансформатора).

Праця [27] присвячена дослідженню радіальних коливань кільцевого дискового п'єзотрансформатора, в якому внутрішня частина поляризована по товщині, а зовнішня – по радіусу. Автори вважають таку конструкцію кільцевим трансформатором типу Розена, основною перевагою якого перед класичним пластинковим варіантом є більша вихідна потужність. Така сама кільцева структура досліджена і в [28] для двох випадків, коли вихідний електрод розміщений на зовнішньому або внутрішньому ободі кільця. Показано,

що вищі обертони мають кращі параметри, ніж основна радіальна мода.

П'єзотрансформатор, що складається із двох поздовжньо поляризованих ділянок різної довжини і працює на вході й виході на моді K_{33} , описаний авторами [24]. Тут коефіцієнт передачі за електричною напругою менший одиниці. Автори й пропонують його для роботи в колах із низькою щільністю вихідної потужності ($\leq 0,09$ Вт/см³) й порівняно низькою ефективністю ($\leq 50\%$).

Аналітичні й експериментальні дослідження [25, 28, 30] для поперечно поляризованих стрижнів показали, що максимум динамічного КЕМЗ на основному поздовжньому резонансі досягається, коли електродне покриття займає 75% площі пластини. Перший радіальний резонанс досягає максимальної ефективності, коли внутрішнє електродне покриття займає 80% діаметра пластини [31, 32]. Різниця пружних властивостей електродованих і безелектродних ділянок у згаданих вище працях [25 - 32] не враховувалась.

Доповідь [33] була присвячена дослідженню поздовжніх коливань тонкого п'єзокерамічного стрижня з двома розрізами електродів і їх проти-фазним з'єднанням. Авторам вдалося виділити перший обертон поздовжніх коливань моду $L3$ з одночасним придушенням основної поздовжньої моди $L1$.

У праці [34] узагальнено результати [35], де вперше розглянуті поздовжні коливання стрижня з одним двостороннім розрізом електродного покриття при кількох режимах навантаження (проти-фазні електроди, коротке замикання однієї з ділянок або її холостий хід) й наведені експериментальні дані щодо напруженого стану пластини.

Треба принагідно зауважити, що задовго до праць [25 – 32] А. Т. Улітко запропонував і обґрунтував так званий енергетичний метод визначення ефективних КЕМЗ [16, 36]. На прикладах поздовжніх коливань частково електродованого тонкого стрижня з поперечною поляризацією і стрижня з поздовжньою поляризацією при заглиблених електродах (або виготовленого із склеєних один над одним електродованих дисків) було показано, що динамічний КЕМЗ досягав максимуму у випадках, коли активна частина становила саме 75% об'єму або площі зразка. Ці висновки були повністю підтверджені при експериментальному дослідженні коливань склеєного із окремих кругових кілець макета потужного акустичного перетворювача [37].

Щодо п'єзоелементів дискової та циліндричної форми, то їх коливання при розрізних і непо-



вних електродах також вивчалися давно, наприклад у [38 – 48]. Концентричні електроди у вигляді розділених кільцевими розрізами або неповного електродного покриття дають можливість виділяти вибрані обертони й гасити небажані коливання [3 – 6, 39, 43, 44]. В разі використання у кругових дисках і кільцях діаметральних розрізів електродного покриття можна досліджувати несиметричні радіально-зсувні моди коливань [4, 5, 45].

Будь-яка відділена від основного електродного покриття п'єзоелемента ділянка перетворює його на трансформатор напруги або струму [49, 50]. Наявність безелектродних областей [40], неповна поляризація окремих ділянок [51] або часткова деполяризація [52], з'єднання (склеювання) п'єзокерамічних і металевих шарів [53, 54] призводять до нерівномірного електричного навантаження з позитивними або негативними наслідками.

Окремий клас нерівномірно навантажених електромеханічних перетворювачів складають п'єзотрансформатори різноманітних конструкцій і призначення [26 – 30, 49, 50, 53 – 60]. Багато цікавих конструкцій з нерівномірним електричним або механічним навантаженням є також в огляді [61].

До складних електромеханічних систем належать також метало-п'єзокерамічні структури, в яких нанесені на металічну основу керамічні п'єзоелементи виконують роль сенсорів і актуаторів [61 – 63]. У працях [62, 63], наприклад, досліджено пасивне та активне демпфірування нестационарних коливань балки з п'єзоелектричними накладками. Пасивне демпфірування відбувалося при навантаженні накладок-сенсорів підключеними до них *RL*-шунтами. Для активного демпфірування застосована методика скінченно-елементного моделювання у частотному просторі інтегральних перетворень Фур'є. Автори вважають, що ними знайдене оптимальне значення керуючого параметра зворотного зв'язку за критерієм максимального демпфірування. Розрахунки проведені для гіпотетичної структури, що складається із металевої балки розмірами 700×20×2 мм і трьох накладок із п'єзокераміки PZT - 2 завбільшки 100×20×2 мм. На жаль, автори не вказали, ні де і як закріплені накладки, ні які моди коливань вони демпфірують. Немає пояснення й продемонстрованої в [55] частотної залежності положення максимумів від способу демпфірування.

У статті [64] показано, що в режимі заданого (сталого за амплітудою) спаду напруги на п'єзоелементі при наближенні до резонансу миттєва

потужність зростає, а поблизу від антирезонансу – знижується. Навпаки, в режимі заданого (сталого за амплітудою) струму через п'єзоелемент при наближенні до резонансу миттєва потужність знижується, а поблизу від антирезонансу збільшується. Ця обставина може бути причиною виявленої авторами робіт [8, 9] нелінійності повної провідності в умовах великої вхідної потужності, як і неможливості забезпечити режим сталого струму на антирезонансі.

Розділені електроди використовуються не лише для виділення вищих обертонів коливань, за їх допомогою також можна значно підсилити слабкі (для випадку суцільних електродів) моди, як це зроблено, наприклад, у праці [65] для особливого крайового резонансу прямокутної пластини.

Автор монографії [66] опрацював власний оригінальний підхід до розв'язання широкого кола задач про резонансні коливання п'єзокерамічних елементів різної геометричної форми. На базі відомих загальних рівнянь електропружності побудовані розв'язки задач про напружено-деформівний стан стрижнів, дисків, кілець, циліндричних і сферичних оболонок, а також біморфних структур. Виведені формули для вхідного імпедансу в інтервалі частот. Розв'язки проілюстровані численними графіками й таблицями. Той же підхід використаний і в праці [67], в якій описані металокерамічні акселерометри неоднорідної структури.

Цікаві дослідження із багато-електродними паралелепіпедами описані в працях [68 – 70], у яких для аналізу електромеханічних явищ на границях електродів використано апарат функцій Гріна. Автори робіт [6, 71, 72] використали в багато-електродних стрижнях і дисках негативний електричний зворотний зв'язок для розширення робочого діапазону низькочастотних перетворювачів. Електромеханічні коливання п'єзокерамічних стрижнів і дисків використовуються для визначення електропружних параметрів п'єзокераміки [1–7, 73, 74].

Ця стаття присвячена аналізу вимушених коливань нерівномірно навантажених перетворювачів, таких як пластини-стрижні із товщинною поляризацією при одному або двох двосторонніх розрізах електродного покриття, тонкі диски й кругові кільця з суцільними й розділеними концентричними та діаметральними розрізами електродів, а також частково електродованих пластин. У першій частині статті наведені для прикладу аналітичні співвідношення, якими описуються радіальні коливання тонких п'єзокераміч-



них дисків із неповним електродуванням поверхні та поздовжні коливання стрижнів із неоднорідним електричним навантаженням. Аналогічні співвідношення для дисків і кругових кілець наведені у згаданих вище працях [4, 5, 42, 45].

Радіальні коливання кругових дисків із концентричними електродами. Кругові тонкі п'єзокерамічні диски з суцільними та розділеними електродами використовуються, як елементи ультразвукових електромеханічних перетворювачів для випромінювання і прийому акустичних коливань, а також у резонаторах і фільтрах частот. Можливі різні варіанти як електричного з'єднання концентричних електродів, так і розміщення неповного електродного покриття [44].

Користуючись методикою і позначеннями роботи [44], розглянемо задачу про радіальні коливання круглої п'єзокерамічної пластинки, поляризованої до насичення по товщині, для випадку, коли кільцевий електрод нанесений на поверхню тонкого диска або кільця концентрично до його контуру, так що з обох боків од нього залишаються безелектродні області. Радіус пластинки R . Від її центру і до радіуса a , а також від радіуса b і до краю електродне покриття з обох боків видалене, так що на поверхні є три кільцеві концентричні ділянки – дві безелектродні і одна вкрита електродом. На границях областей радіальні зміщення і напруження неперервні, на контурі пластинки радіальні напруження відсутні. Рівняння руху однакове для всіх трьох ділянок

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial (kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{\partial U_r}{\partial (kr)} + \left(1 - \frac{1}{(kr)^2}\right) U_r = 0, \quad (1)$$

де U_r – радіальні зміщення, k – хвильове число.

Рівняння стану, які зв'язують компоненти тензора пружних деформацій ε_r , ε_θ з компонентами механічних напружень σ_r , σ_θ і напруженістю E_z та індукцією D_z електричного поля, для електродованої ділянки описуються формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= s_{11}^E \sigma_r + s_{12}^E \sigma_\theta + d_{31} E_z, \\ \varepsilon_\theta &= s_{12}^E \sigma_r + s_{11}^E \sigma_\theta + d_{31} E_z, \\ D_z &= \varepsilon_{33}^T E_z + d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta), \end{aligned} \quad (2)$$

де s_{11}^E , s_{12}^E – компоненти пружної податливості при сталій напруженості електричного поля, d_{31} – п'єзомодуль, ε_{33}^T – діелектрична проникність при сталому механічному напруженні.

На безелектродних ділянках $D_z = 0$, тому

$$\varepsilon_r = s_{11}^D \sigma_r + s_{12}^D \sigma_\theta, \quad (3)$$

$$\varepsilon_\theta = s_{12}^D \sigma_r + s_{11}^D \sigma_\theta,$$

$$\text{де } s_{11}^D = s_{11}^E - \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^T}, \quad s_{12}^D = s_{12}^E - \frac{d_{31}}{\varepsilon_{33}^T}.$$

Позначивши ділянки пластинки відповідними індексами 1–3, для складових механічних напружень в областях можна записати

$$\sigma_{r1} = \frac{1}{s_{11}^D (1 - v_D^2)} (\varepsilon_{r1} + v_D \varepsilon_{\theta 1}), \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta 1} = \frac{1}{s_{11}^D (1 - v_D^2)} (v_D \varepsilon_{r1} + \varepsilon_{\theta 1});$$

$$\sigma_{r2} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - v_E^2)} (\varepsilon_{r2} + v_E \varepsilon_{\theta 2}) - \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - v_E)}, \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta 2} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - v_E^2)} (v_E \varepsilon_{r2} + \varepsilon_{\theta 2}) - \frac{d_{31} E_z}{s_{11}^E (1 - v_E)};$$

$$\sigma_{r3} = \frac{1}{s_{11}^D (1 - v_D^2)} (\varepsilon_{r3} + v_D \varepsilon_{\theta 3}), \quad (6)$$

$$\sigma_{\theta 3} = \frac{1}{s_{11}^D (1 - v_D^2)} (v_D \varepsilon_{r3} + \varepsilon_{\theta 3});$$

де $v_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$, $v_D = -s_{12}^D / s_{11}^D$ є коефіцієнти Пуассона в електродованих і безелектродних ділянках відповідно.

Розв'язок рівняння (1) для кожної ділянки записується через функції Бесселя першого J_1 і другого N_1 роду

$$U_{r1} = A_1 J_1(k_D r),$$

$$U_{r2} = A_2 J_1(k_E r) + B_2 N_1(k_E r), \quad (7)$$

$$U_{r3} = A_3 J_1(k_D r) + B_3 N_1(k_D r),$$

де $k_E^2 = \rho(1 - v_E^2) s_{11}^E$, $k_D^2 = \rho(1 - v_D^2) s_{11}^D$ є відповідні хвильові числа, а ρ – густина.

Після простих перетворень отримуємо такі формули для сталих інтегрування

$$A_1 = \frac{A_2 J_1(\gamma_1 x) + B_2 N_1(\gamma_1 x)}{J_1(\mu \gamma_1 x)};$$

$$A_2 = \frac{B_2 M + GR \gamma_2 S_{23} N_1(\mu \gamma_2 x)}{Q} L_{3D}^R,$$

$$B_2 = \frac{GR [\gamma_2 S_{23} S_1^{DE} N_1(\mu \gamma_2 x) + Q \gamma_1 J_1(\mu \gamma_1 x)]}{P_{ED} Q - S_1^{DE} M}; \quad (8)$$

$$A_3 = \frac{A_2 K_{2E}^b L_{3D}^R + B_2 L_{2E}^b L_{3D}^R - GR \gamma_2 L_{3D}^R}{\lambda^2 S_{23}},$$

$$B_3 = -\frac{A_3 K_{3D}^R}{L_{3D}^R}.$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned}
 x &= k_E R, \gamma_1 = a / R, \gamma_2 = b / R; \\
 \lambda^2 &= \frac{s_{11}^E (1 - v_E^2)}{s_{11}^D (1 - v_D^2)}, \mu = \frac{1}{\lambda}; \\
 G &= (1 + v_E) d_{31} E_z; \\
 K_{1E}^a &= (\gamma_1 x) J_0(\gamma_1 x) - (1 - v_E) J_1(\gamma_1 x), \\
 K_{2E}^b &= (\gamma_2 x) J_0(\gamma_2 x) - (1 - v_E) J_1(\gamma_2 x); \\
 L_{1E}^a &= (\gamma_1 x) N_0(\gamma_1 x) - (1 - v_E) N_1(\gamma_1 x); \\
 K_{1D}^a &= (\mu \gamma_1 x) J_0(\mu \gamma_1 x) - (1 - v_D) J_1(\mu \gamma_1 x), \\
 K_{2D}^b &= (\mu \gamma_2 x) J_0(\mu \gamma_2 x) - (1 - v_D) J_1(\mu \gamma_2 x); \\
 L_{2E}^b &= (\gamma_2 x) N_0(\gamma_2 x) - (1 - v_E) N_1(\gamma_2 x), \\
 L_{2D}^b &= (\mu \gamma_2 x) N_0(\mu \gamma_2 x) - (1 - v_D) N_1(\mu \gamma_2 x); \\
 K_{3D}^R &= (\mu x) J_0(\mu x) - (1 - v_D) J_1(\mu x); \\
 L_{3D}^R &= (\mu x) N_0(\mu x) - (1 - v_D) N_1(\mu x). \\
 S_{23} &= K_{2D}^b L_{3D}^R - K_{3D}^R L_{2D}^b, S_2^b = 2 / \pi; \\
 S_1^{DE} &= K_{1D}^a J_1(\gamma_1 x) \lambda^2 - K_{1E}^a J_1(\mu \gamma_1 x); \\
 P_{12} &= L_{2D}^b J_1(\gamma_2 x) \lambda^2 - K_{2E}^b N_1(\mu \gamma_2 x), \\
 P_{21} &= L_{2D}^b N_1(\gamma_2 x) \lambda^2 - L_{2E}^b N_1(\mu \gamma_2 x); \\
 P_{ED} &= L_{1E}^a J_1(\mu \gamma_1 x) - K_{1D}^a N_1(\gamma_1 x) \lambda^2; \\
 Q &= K_{2E}^b L_{3D}^R S_2^b - S_{23} P_{12}; \\
 M &= -L_{2E}^b L_{3D}^R S_2^b + S_{23} P_{21}.
 \end{aligned} \quad (9)$$

Співвідношення (1)–(10) є настільки ж загальними, як і вирази (1.1)–(1.13) роботи [44]. Із них можна перейти до частинних випадків суцільних електродів, а також електродів, розташованих на центральній плямі або периферійному кільці диска. Разом із згаданою роботою ці вирази повністю описують поведінку тонкого п'єзокерамічного диска, який має три концентричні ділянки, в різних умовах нерівномірного електричного навантаження і в такий спосіб завершують вивчення цього питання.

Аналітичні вирази для компонентів повної провідності п'єзокерамічних резонаторів стрижневого типу. У публікаціях [7, 11, 12, 64] показано, що всі існуючі формули для повної провідності Y_{pe} (адмітансу) п'єзокерамічних резонаторів можуть бути зведені до єдиного виразу

$$\begin{aligned}
 Y_{pe} &= j\omega C_0 \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = \frac{j2\pi f_{01} C_0 x}{x_{01}} \frac{\Delta_a}{\Delta_r} = \\
 &= jax \frac{\Delta_a}{\Delta_r}, \left(a = \frac{2\pi f_{01} C_0}{x_{01}} \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

в якому: j – уявна одиниця, ω – кругова частота, C_0 – статична між-електродна ємність, Δ_r – резонансний визначник, Δ_a – антирезонансний визначник, x – поточне значення комплексної безрозмірної частоти, x_{01} – активна складова резонансної безрозмірної частоти, f_{01} – виміряна частота (в Герцах) максимуму повної провідності.

У випадку поздовжніх коливань тонкого п'єзокерамічного стержня із поперечною поляризацією при суцільних електродах, які повністю покривають головні поверхні [3].

$$\begin{aligned}
 \Delta_r(x) &= \cos(x), \\
 \Delta_a(x) &= (1 - k_{31}^2) \Delta(x) + k_{31}^2 \sin x / x. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Всі електропружні коефіцієнти у виразах (1) і (2) є комплексними [3–5, 7, 57],

$$\begin{aligned}
 s_{11}^E &= s_{110} (1 - js_{11m}), \\
 \varepsilon_{33}^T &= \varepsilon_{330} (1 - j\varepsilon_{33m}), \\
 d_{31} &= d_{310} (1 - jd_{31m}), \quad (13)
 \end{aligned}$$

у тонкому стрижні завдовжки l , завширшки W і завтовшки h із суцільними електродами

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}_1 &= C_{01} (1 - j\varepsilon_{33m}), \quad x = x_0 (1 - 0.5js_{11m}), \\
 C_{01} &= \frac{\varepsilon_{330} l W}{h}, \quad d_{31}^2 = d_{310}^2 (1 - 2jd_{31m}), \\
 k_{31}^2 &= k_{310}^2 [1 + j(s_{11m} + \varepsilon_{33m} - 2d_{31m})], \quad (14)
 \end{aligned}$$

де k_{31}^2 – квадрат статичного поперечного КЕМЗ.

Перейдемо до аналізу вимушених коливань тонких п'єзокерамічних вузьких стрижнів із частково електродованими поверхнями та із електродами, розділеними двома або одним паралельними до їх торців розрізами. Такі структури зображені умовно на рис.1, де відділені електродні ділянки увімкнуті в електричне коло протифазно. Можливі й інші схеми електричного навантаження, такі як коротке замикання окремих ділянок або їх холостий хід. Електродні ділянки зображені потовщеними лініями. Поляризація на перших трьох схемах спрямована вздовж поперечної (товщинної) координати, а на четвертій схемі – поперечно-поздовжня. Та схема зображує класичний п'єзотрансформатор типу Розена, в якому одна половина пластини поляризована по товщині, а друга половина по довжині.

Щоб отримати вирази для повної провідності того чи іншого п'єзоперетворювача необхідно розв'язати відповідну електропружну задачу. Почнемо з першої схеми (рис. 1, а), яка містить електродні й безелектродні ділянки поверхні. Сумістимо початок координат (для всіх чотирьох схем)

з центром пластини. Вкрита електродами ділянка l займає частину пластини $-a \leq y \leq a$, безелектродна ділянка ll (праворуч) розміщена в межах $a \leq y \leq l$, а ділянка lll (ліворуч) сягає $-l \leq y \leq -a$. Всі змінні в подальшому мають відповідні індекси 1, 2 і 3, а позначення збігаються з

працями [11, 12, 34, 64]. Коливання збуджуються прикладеною від генератора різницею потенціалів $V_0 = V_0 e^{j\omega t}$, множник $e^{j\omega t}$ опущений. Вважається, що електродне покриття було видалене із частини поверхні після поляризації всього стрижня.

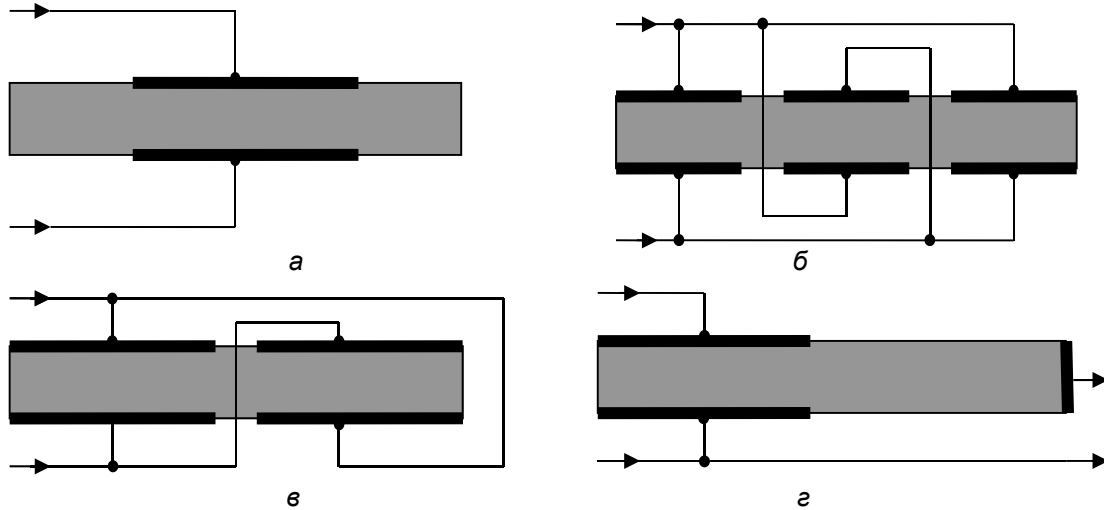


Рис 1. Умовне зображення деяких нерівномірно навантажених п'єзокерамічних стрижнів

Рівняння стану і руху в електродованій ділянці суть

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y1} &= \frac{\partial U_{y1}}{\partial y} = s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}, \\ D_{x1} &= \varepsilon_{33}^T E_{x1} + d_{31} \sigma_{y1}, \\ \frac{d^2 U_{y1}}{dy^2} + \rho \omega^2 s_{11}^E U_{y1} &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для безелектродних ділянок рівняння стану інші, зокрема

$$\begin{aligned} D_{x2} &= 0, E_{x2} = \frac{d_{31} \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T}, \\ \varepsilon_{y2} &= s_{11}^E \sigma_{y2} - \frac{d_{31}^2 \sigma_{y2}}{\varepsilon_{33}^T} = \\ &= s_{11}^E \sigma_{y2} \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T} \right) = \\ &= s_{11}^E (1 - k_{31}^2) \sigma_{y2} = s_{11}^D \sigma_{y2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Вирази для поздовжніх зміщень і деформацій у всіх трьох ділянках мають однаковий вигляд

$$\begin{aligned} U_{yi} &= A_i \sin k_i y + B_i \cos k_i y, \\ \varepsilon_{yi} &= A_i k_i \cos k_i y - B_i k_i \sin k_i y, \end{aligned} \quad (17)$$

$$(k_1^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E, k_2^2 = \rho \omega^2 s_{11}^D, k_3^2 = k_2^2, i = 1, 2, 3).$$

Для поздовжніх деформацій і напружень в областях пластини можна відповідно записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_{y1} &= s_{11}^E \sigma_{y1} + d_{31} E_{x1}, \sigma_{y1} = \frac{\varepsilon_{y1}}{s_{11}^E} - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E} = \\ &= \frac{A_1 k_1 \cos k_1 y - B_1 k_1 \sin k_1 y}{s_{11}^E} - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}, \\ \varepsilon_{y2} &= s_{11}^D \sigma_{y2}, \varepsilon_{y3} = s_{11}^D \sigma_{y3}, \\ \sigma_{y2} &= \frac{\varepsilon_{y2}}{s_{11}^D} = \frac{A_2 k_2 \cos k_2 y - B_2 k_2 \sin k_2 y}{s_{11}^D}, \\ \sigma_{y3} &= \frac{A_3 k_3 \cos k_3 y - B_3 k_3 \sin k_3 y}{s_{11}^D}. \end{aligned} \quad (18)$$

На торцях механічних напружень немає, а на границі областей напруження й зміщення неперервні, крім того коливання пластини симетричні:

$$\begin{aligned} \sigma_{y3}(-l) &= \sigma_{y2}(l) = 0, \sigma_{y1}(a) = \sigma_{y2}(a), \\ U_{y1}(0) &= 0, U_{y1}(a) = U_{y2}(a), \\ \sigma_{y1}(-a) &= \sigma_{y3}(-a), U_{y1}(-a) = U_{y3}(-a). \end{aligned} \quad (20)$$

Із співвідношень (18) – (20) отримуємо

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_1}{k_1 \Delta}, B_1 = 0; \\ A_2 &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_2}{k_1 \Delta}, A_3 = A_2; \\ B_2 &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_3}{k_1 \Delta}, B_3 = -B_2, \end{aligned} \quad (21)$$

де $\Delta_1 = \cos(\lambda\kappa - \lambda\gamma\kappa)$, $\Delta_2 = \sin\lambda\kappa \sin\gamma\kappa$,
 $\Delta_3 = \sin\gamma\kappa \cos\lambda\kappa$, $\kappa = k_1 l$, $\gamma = a/l$, $\lambda = k_2/k_1$.

Підставляючи (18) в (15) і враховуючи (21), отримуємо вираз для електростатичної індукції D_{x1} в електродованій ділянці

$$D_{x1} = \varepsilon_{33}^T E_{x1} (1 - k_{31}^2) + \frac{d_{31} A_1 k_1 \cos k_1 y}{s_{11}^E}, \quad (22)$$

інтегрування якого по площі дає можливість визначити повний п'єзозаряд Q_1 , струм I_1 і адмітанс Y пластини

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_S D_{x1} dS = \\ &= \varepsilon_{33}^T S_1 E_{x1} \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right], \\ I_1 &= j\omega Q_1 = \\ &= -j\omega C_0^T V_0 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right], \\ Y &= I_1 / V_0 = \\ &= -j\omega C_0^T \left[1 - k_{31}^2 + \frac{\lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

де $C_0^T = \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}$, $S_1 = 2a \cdot 2b$, $\delta = 2h$, $E_{x1} = -\frac{V_0}{\delta}$,

$$Y = -j\omega C_0^T \frac{\Delta_a}{\Delta_r}, \quad \Delta_r = \Delta,$$

$$\Delta_a = (1 - k_{31}^2) \Delta + \lambda k_{31}^2 \sin \gamma \kappa \Delta_1 / \gamma \kappa.$$

Всі електропружні константи у виразах (14) – (23), як і самі ці вирази, є комплексними.

На основі вище викладеного для розподілу зміщень і напружень уздовж пластини від координати $y=0$ до $y=l$ можна записати

$$\begin{aligned} U_{y1} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_1}{k_1 \Delta} \sin k_1 y, \\ U_{y2} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1}}{k_1 \Delta} (\Delta_2 \sin k_2 y + \Delta_3 \cos k_2 y), \\ \sigma_{y1} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} \Delta_1}{s_{11}^E \Delta} \cos k_1 y - \frac{d_{31} E_{x1}}{s_{11}^E}, \\ \sigma_{y2} &= \frac{\lambda d_{31} E_{x1} k_2}{k_1 s_{11}^E \Delta} (\Delta_2 \cos k_2 y - \Delta_3 \sin k_2 y). \end{aligned} \quad (24)$$

Розглянемо електродну систему зображеної на рис.1,б другої схеми. Центральна ділянка I займає частину пластини $-a \leq y \leq a$, ділянка II (праворуч) розміщена в межах $a \leq y \leq l$, а ділянка III (ліворуч) сягає $-l \leq y \leq -a$. Спершу будемо вважати, що усі три ділянки є незалежними в кожній із них діє своє електричне поле з напруженістю E_1 , E_2 , E_3 відповідно. Рівняння стану і руху для усіх трьох ділянок однакові й збігаються з виразами (15), а зміщення й деформації описуються формулами (17). Граничні умови записуються по аналогії з (20). В силу симетричності поздовжніх зміщень стала $B_1 = 0$. Решта сталих інтегрування є:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos(kl - ka), \\ A_2 &= \frac{d_{31} E_2}{k \cos kl} + \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \sin kl \sin ka, \\ B_2 &= \frac{d_{31} (E_1 - E_2)}{k \cos kl} \cos kl \sin ka, \\ A_3 &= A_2 + \frac{d_{31} (E_3 - E_2)}{k \cos(kl - ka)} \cos kl, \\ B_3 &= -A_3 \frac{\cos kl}{\sin kl} + \frac{d_{31} E_3}{k \sin kl}; \\ &\quad (k^2 = \rho \omega^2 s_{11}^E). \end{aligned} \quad (25)$$

Слід зауважити, що для протифазного електричного навантаження $E_2 = -E_1$ ($E_2 = E_3$) ці співвідношення збігаються з виразами (6) роботи [33].

Електростатична індукція в області I виражається формулою (22) і для наведених на електродах областей I та II п'єзозарядів та струмів отримуємо відповідно

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int_S D_{x1} dS = \\
&= \varepsilon_{33}^T S_1 E_1 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \sin \gamma \kappa \right], \\
I_1 &= -j\omega C_1^T V_1 \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \sin \gamma \kappa \right], \quad (26) \\
Q_2 &= \varepsilon_{33}^T S_2 E_1 \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right], \\
I_2 &= -j\omega C_2^T V_1 \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right],
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Delta &= \cos \kappa, \Delta_1 = \mu_2 + (1 - \mu_2) \cos(\kappa - \gamma \kappa), \\
(\mu_2 = \frac{E_2}{E_1}, E_1 = -\frac{V_1}{\delta}, E_2 = -\frac{V_2}{\delta}), \\
\Delta_2 &= \mu_2 + (1 - \mu_2) \sin \gamma \kappa \sin \kappa, \\
\Delta_3 &= (1 - \mu_2) \sin \gamma \kappa \cos \kappa, \\
\Delta_0 &= \Delta_2 (\sin \kappa - \sin \gamma \kappa) + \Delta_3 (\cos \kappa - \cos \gamma \kappa), \quad (27) \\
C_1^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T S_1}{\delta}, S_1 = 2a \cdot 2b, \delta = 2h, \\
C_2^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T S_2}{\delta}, S_2 = (l - a) \cdot 2b, \\
C_0^T &= \frac{\varepsilon_{33}^T 2l \cdot 2b}{\delta} = C_1^T + 2C_2^T, \\
C_1^T &= \gamma C_0^T, C_2^T = \frac{1 - \gamma}{2} C_0^T.
\end{aligned}$$

Відношення напруженостей електричного поля μ_2 може бути будь-яким, проте для практики мають смисл лише три такі величини: 0, 1, -1. Перша цифра відповідає короткому замиканню другої і третьої ділянок, друга має місце при суцільних електродах пластини, а третя відображає протифазне електричне навантаження [33]. Загальний струм I , що протікає через резонатор, як і адмітанс стрижня Y , залежать від способу електричного навантаження його ділянок. Коли вважати ділянки II і III еквіпотенціальними, то можна записати

$$\begin{aligned}
I &= I_1 + 2I_2 = \\
&= -j\omega C_0^T V_1 \left\{ \gamma \left[1 - k_{31}^2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_1}{\gamma \kappa \Delta} \sin \gamma \kappa \right] + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \gamma) \left[(1 - k_{31}^2) \mu_2 + \frac{k_{31}^2 \Delta_0}{(\kappa - \gamma \kappa) \Delta} \right] \right\}. \quad (28)
\end{aligned}$$

Максимуми струму в стрижні досягаються на резонансних частотах, які є коренями рівняння

$$\Delta(\kappa) = \cos(\kappa) = 0, \quad (29)$$

а щоб визначити антирезонансні частоти, на яких струм досягає мінімальних величин, треба прирівняти до нуля вираз у фігурних дужках в (28) (він визначає адмітанс пластини) і знайти корені рівняння

$$\begin{aligned}
(1 - k_{31}^2) \Delta \gamma_1 + k_{31}^2 (\Delta_1 \sin \gamma \kappa + \Delta_0) / \kappa = 0, \quad (30) \\
(\gamma_1 = \gamma + (1 - \gamma) \mu_2).
\end{aligned}$$

Антирезонансні частоти згідно із (30) залежать від квадрату статичного КЕМЗ k_{31}^2 , положення границі розділення γ і відношення напруженостей електричного поля в ділянках.

Якщо зробити один двосторонній розділ електродного покриття і з'єднати обидві ділянки протифазно (рис. 1, в), то можна виділити парні поздовжні моди коливань L_2, L_6, L_{10} , які при суцільних електродах, а також у випадку трьох областей не збуджуються. Цей випадок, а також коротке замикання однієї із ділянок стрижня, детально проаналізовані в роботі [34].

Класичний п'єзотрансформатор, структура якого відповідає схемі рис. 1, а, також має дві електродні ділянки. Перша (вхідна) секція поляризована по товщині з електродами на головних поверхнях. Друга (вихідна або генераторна) секція має єдиний електрод на одному з торців пластини й поляризацію по довжині. Неоднорідність такої системи викликана значною різницею швидкостей звуку в її секціях, яка впливає на енергетичні й частотні властивості [2, 4, 5, 55, 56]. Відповідні формули для механічних зміщень, напружень і для коефіцієнта трансформації виведені в [5, 55, 56], де показано, зокрема, що коефіцієнт передачі п'єзотрансформатора в режимі холостого ходу обернено пропорційний до квадрату частоти.

Висновки. Використовуючи неповністю електродовані п'єзоелектричні перетворювачі, можна добирати як величину динамічного КЕМЗ, так і змінювати в широких межах адмітанс.

Співвідношення (1) – (10) разом із роботою [44] повністю описують поведінку тонкого п'єзокерамічного диска, який має три концентричні ділянки, в різних умовах нерівномірного електричного навантаження.

Завдяки розділенню електродів на кілька ділянок з наступним неоднорідним навантаженням можна як „підсилювати” окремі обертони, так і „гасити” небажані резонанси, включаючи основну моду коливань.

У другій частині статті наведені експериментальні дані для поздовжніх коливань стрижнів-

пластин з розділеними або частковими електродами, які повністю узгоджуються з розрахунками. Ефективність перетворення енергії оцінювалася

як за динамічним КЕМЗ, так і за напруженим станом і вхідним адмітансом.

Надійшла до редакції 20 травня 2016 р.

УДК 539.3: 537.226.86: 534.1

Карлаш В. Л., д.т.н., OrCID [0000-0001-7491-1729](https://orcid.org/0000-0001-7491-1729),

e-mail: karlashv@ukr.net

Безверхий А. И., д.ф.-м.н., OrCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335),

e-mail: o_bezver@ukr.net

Зинчук Л. П., к.ф.-м.н., OrCID [0000-0003-4615-9837](https://orcid.org/0000-0003-4615-9837),

e-mail: zinchuk_imech@ukr.net

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ВЫНУЖДЕННЫЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ ПЛАСТИН И СТЕРЖНЕЙ С РАЗДЕЛЕННЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ.

ЧАСТЬ I: АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ СВЯЗИ И КОМПОНЕНТ ПОЛНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Статья посвящена анализу вынужденных колебаний неравномерно нагруженных преобразователей, таких как пластины-стержни с толщинной поляризацией при одном либо двух двусторонних разрезах электродного покрытия, тонкие диски и круговые кольца со сплошными и разделенными концентрическими и диаметрными разрезами электродами, а также частично электродированных пластин. В первой части приведены аналитические соотношения, описывающие радиальные колебания тонких пьезокерамических дисков с неполными электродами и продольные колебания стержней с неоднородным электрическим нагружением. Во второй части приведены экспериментальные данные для продольных колебаний стержнем с разделенными либо частично электродами.

Библ. 74, рис. 1

Ключевые слова: пьезокерамические пластины; разделенные электроды; неравномерное электрическое нагружение; входной адмиттанс.

UDC 539.3: 537.226.86: 534.1

V. L. Karlash, Dr.Sc. (Eng.), OrCID [0000-0001-7491-1729](https://orcid.org/0000-0001-7491-1729),

e-mail: karlashv@ukr.net

O. I. Bezverkhyy, Dr.Sc. (Phys.-Math.), OrCID [0000-0002-0834-6335](https://orcid.org/0000-0002-0834-6335),

e-mail: o_bezver@ukr.net

L. P. Zinchuk, PhD, OrCID [0000-0003-4615-9837](https://orcid.org/0000-0003-4615-9837),

e-mail: zinchuk_imech@ukr.net

S. P. Timoshenko Institute of Mechanics, The National Academy of Sciences of Ukraine

FORCED ELECTRO-ELASTIC VIBRATIONS OF THE PIEZOCERAMIC PLATES AND RODS WITH DIVIDED ELECTRODES.

PART I: ANALYTICAL RELATIONS FOR COUPLING COEFFICIENTS AND ADMITTANCE'S COMPONENTS



This article analyses the forced vibrations of the non-uniform loaded piezoceramic transducers, such as plates-rods with thickness polarization and one or two bilateral electrode coating divisions, thin disks and circular rings with full or concentric and diameter divided electrodes, as well as partly electroded plates. The analytical relations for thin piezoceramic discs' with partial electrodes radial vibrations and for rods' with no uniform electric loading longitudinal vibrations are represented in a first part. The experimental data for rods with divided or partial electrodes are represented in a second part.

Ref. 74, fig. 1.

Keywords: piezoceramic plates; divided electrodes; non-uniform electric load; input admittance.

References:

- [1]. I. A. Gluzman, *Pezokeramika [Piezoceramics]*. Moscow: Energiya, 1972.
- [2]. H. W. Katz, Ed., *Magnitnye i dielektricheskie pribory. Ch. I. [Magnetic and dielectric devices. Part I]*. Moscow: Energiya, 1964.
- [3]. N. A. Shul'ga and A. M. Bolkisev, *Kolebaniya pezelektricheskikh tel [Vibrations of piezoelectric bodies]*. Kiev: Naukova dumka, 1990.
- [4]. M. O. Shul'ga and V. L. Karlash, *Rezonansni elektromekhanichni kolyvannia piezoelektrychnykh plastytn [Resonant electromechanic vibrations of piezoelectric plates]*. Kyiv: Naukova dumka, 2008.
- [5]. V. L. Karlash, "Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates," *Int. Appl. Mech*, vol. 41, no. 7, pp. 709 – 747, 2005. DOI: [10.1007/s10778-005-0140-2](https://doi.org/10.1007/s10778-005-0140-2)
- [6]. V. M. Sharapov, I. G. Minaev, Yu. Yu. Bondarenko et al., *Pezelektricheskie preobrazovateli. Spravochnoe posobie [Piezoelectric transducers. Handbook]*. Cherkassy: ChGTU, 2004.
- [7]. V. L. Karlash, "Metody vyznachennia koefitsientiv zviazku i vtrat enerhii pry kolyvanniakh rezonatoriv iz piezokeramiky [Methods of determination of coupling factors and energy losses at piezoceramics resonator's vibrations]," *Acoustic bulletin*, vol. 15, no. 4, pp. 24–38, 2012.
- [8]. K. Uchino, J. H. Zheng, Y. H. Chen et al, "Loss mechanisms and high power piezoelectrics," *J. Mat. Sci.*, vol. 41, pp. 217 – 228, 2006. DOI: [10.1007/s10853-005-7201-0](https://doi.org/10.1007/s10853-005-7201-0)
- [9]. K. Uchino, Yu. Zhuang, and S. O. Ural, "Loss detertmination methodology for a piezoelectric ceramic: new phenomenological theory and experimental proposals," *J. Advanced Dielectrics*, vol. 1, no. 1, pp. 17 – 31, 2011. DOI: [10.1142/S2010135X11000033](https://doi.org/10.1142/S2010135X11000033)
- [10]. B. Jaffe, W. R. Cook, and H. Jaffe, *Pezelektricheskaya keramika [Piezoelectric ceramics]*. Moscow: Mir, 1974.
- [11]. V. L. Karlash, "Energy losses in piezoceramic resonators and its influence on vibrations' characteristics," *Electronics and communication*, vol. 19, no. 2(79), pp. 82 – 94, 2014.
- [12]. V. L. Karlash, "Modeling of energy-loss piezoceramic resonators by electric equivalent networks with passive elements," *Mathematical modeling and computing*, vol. 1, no. 2, pp.163 – 177, 2014.
- [13]. C. E. Land, G. W. Smith, and C. R. Westgate, "The dependence of small-signal parameters of the ferroelectric ceramic resonators upon state of polarization," *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, SU-11, pp. 8 – 19, 1964. DOI: [10.1109/T-SU.1964.29327](https://doi.org/10.1109/T-SU.1964.29327)
- [14]. J. A. Lewis, "The effect of driving electrode shape on the electrical properties of piezoelectric crystals," *Bell System Techn. J.*, vol. 40, pp. 1259 – 1280, 1961.
- [15]. M. Redwood, "Coupling between two modes of vibrations in piezoelectric resonator," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 38, pp. 568 – 582, 1965. DOI: [10.1121/1.1909748](https://doi.org/10.1121/1.1909748)
- [16]. A. F. Ulitko, "K teorii elektromekhanicheskogo preobrazovatelya ehnergii v neravnomerno deformiruemyykh pezokeramicheskikh telakh [On the theory of the electro-mechanical energy transform in non-uniform deformed piezoceramic bodies]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 13, no. 10, pp. 115 – 123, 1977.
- [17]. W. Cady, *Pezelektrichestvo i ego prakticheskoe primenenie [Piezoelectricity and its practical application]*. Moscow: Izdatelstvo inostrannoy literatury, 1949.
- [18]. D. E. Dye, "The piezoelectric quartz resonator and its equivalent circuit," in *1926 Proc. Phys. Soc.*, vol. 38, pp. 399 – 453.
- [19]. C. A. Rosen, U.S. Patent 439 992, June 29, 1954.
- [20]. S. Butterworth, "On electrically maintained vibrations," in *1915 Proc. Phys. Soc.*, vol. 27, pp. 410 – 424.
- [21]. J. Valasek, "Piezoelectric activity of Rochelle salt under various conditions," *Phys. Rev.*, vol. 19, pp. 478-491, 1922.
- [22]. W. G. Cady, "Piezoelectric etalons of high frequency," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 10, pp. 475 – 489, 1925.



- [23]. W. G. Cady, "Theory of longitudinal vibrations of viscous rods," *Phys. Rev.*, vol. 19, no. 1, pp. 1 – 6, 1922.
- [24]. S. Ya. Sokolov, "Kolebaniya pezoelektricheskikh kvarcevykh sterzhnej v neodnorodnom pole [Vibrations of the piezoelectric quartz rods in non-uniform field]," *Uspekhy fizicheskikh nauk*, vol. 50, pp. 385 – 394, 1928.
- [25]. J. Erhart and S. Tutu, "Effective electromechanical coupling for the partially electroded ceramic resonators of different geometries," *The Annals "Dunarea de Jos" University of Galati, Fascicle IX. Metallurgy and Material Science*, no 2, pp. 7 – 16, 2015.
- [26]. P. Pulpan and J. Erhart, "Experimental verification of an analytical model for the ring shaped piezoelectric transformer," *Journal of Electrical and Electronics Engineering*. Vol. 8, no. 2, pp. 23 – 28, 2015.
- [27]. K. Nadal, F. Pigache and J. Erhart, "Modeling of a ring Rosen-type piezoelectric transformer by Hamilton's principle," *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 62, no. 4, pp. 709 – 720, 2015. DOI: [10.1109/TUFFC.2014.006719](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2014.006719)
- [28]. J. Erhart, "Parameters and design optimization of the ring piezoelectric ceramic transformer," *J. Adv. Dielect.*, vol. 5, no. 3, Art no. 1550022, 2015. DOI: [10.1142/S2010135X15500228](https://doi.org/10.1142/S2010135X15500228)
- [29]. S. Tutu and J. Erhart, "Bar piezoelectric ceramic transformers working in longitudinal mode," *Ferroelectrics*, vol. 486, no. 1, pp. 13 – 24, 2015. DOI: [10.1080/00150193.2015.1099413](https://doi.org/10.1080/00150193.2015.1099413)
- [30]. J. Erhart, "Bulk piezoelectric ceramic transformers," *Adv. Appl. Ceram.*, vol. 112, no. 2, pp. 91 – 96, 2013. DOI: [10.1179/1743676112Y.0000000028](https://doi.org/10.1179/1743676112Y.0000000028)
- [31]. N. F. Ivina, "Analysis of the natural vibrations with partial electrodes," *Acoustical physics*, vol. 47, no. 6, pp. 714 – 720, 2001. DOI: [10.1134/1.1418899](https://doi.org/10.1134/1.1418899)
- [32]. N. N. Rogacheva, "The dependence of the electromechanical coupling coefficient of piezoelectric elements on the position and size of the electrodes," *J. Appl. Math. Mech.*, vol. 65, no. 2, pp. 317 – 326, 2001. DOI: [10.1016/S0021-8928\(01\)00036-3](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(01)00036-3)
- [33]. V. O. Andrushchenko, O. V. Boryseyko, D. S. Nemchenko, and I. A. Ulitko, "Eksperymentalne vyvchennia efektyvnosti peretvorennia enerhii na rezonansnykh kolyvanniakh piezokeramichnoho sterzhnia z rozriznymi elektrodami pry kerovanomu elektrychnomu zbudzhenni [Experimental investigation of the energy transducing affectivity at piezoceramic bar with divided electrodes and control electric exiting resonant vibrations]," in *Proc. Acoustic symposium "Konsonans-2009"*, Kyiv, pp. 38 – 43.
- [34]. V. L. Karlash, "Forced electromechanical vibrations of rectangular piezoceramic bars with sectionalized electrodes," *Int. Appl. Mech.*, vol. 49, no. 3, pp. 360 – 368, 2013. DOI: [10.1007/s10778-013-0574-x](https://doi.org/10.1007/s10778-013-0574-x)
- [35]. B. Van der Veen, "The equivalent network of a piezoelectric crystal with divided electrodes," *Phillips Res. Rep.*, vol. 11, pp. 66 – 79, 1956.
- [36]. A. F. Ulitko, "Ob opredelenii koeffitsienta elektromekhanicheskoy svyazi v zadachakh ustanovivshixsya kolebaniy pezokeramicheskikh tel [On electromechanical coupling factor determine in problem of the piezoceramic bodies' fixed vibrations]," *Math. methods and physicomach. fields*, issue 7, pp. 77 – 81, 1978.
- [37]. V. L. Karlash, "Formy kolebaniy i effektivnost preobrazovaniya energii sostavnymi pezokeramicheskimi sterzhnyami [Vibration forms and efficiency of the energy transform by composed piezoceramic bars]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 23, no. 2, pp. 72 – 78, 1987. [in Russian]
- [38]. M. Onoe, "Frequency of edge mode of isotropic thin rectangular plate, circular disk and rod," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 33, p. 1627L, 1961.
- [39]. E. C. Munk, "The equivalent electrical circuit for radial modes of a piezoelectric ceramic disk with concentric electrodes," *Phillips Res. Rep.*, vol. 20, pp. 170 – 189, 1965.
- [40]. K. Okadzakhi and M. Umino, "Analysis of vibrations in thin piezoceramic resonators with annular electrodes," *Nippon Onkyo Gakkaishi (J. Acoust. Soc. Jpn)*, vol. 25, no. 6, pp. 325 – 334, 1969.
- [41]. V. N. Lazutkin, Yu. V. Tsyganov, V. A. Klyushnichenko, "Radialnye kolebaniya i elektricheskii impedans pezokeramicheskikh kolets s polarizatsiey po vysote [Radial vibrations and electrical impedance of piezoceramic rings with height polarization]," in *Piezoelectric materials and transducers*. Rostov-on-Don: Izdatelstvo RGU, pp. 4 – 9, 1971.
- [42]. I. F. Vovkodav, "Radialnye kolebaniya tonkoy pezokeramicheskoy plastinki s razreznymi elektrodami [Radial vibrations of the thin piezoceramic plate with divided electrodes]," *Teplovye napryuazheniya v elementakh konstruktziy*, vol. 15, pp. 99–103, 1975.

- [43]. V. A. Andrushchenko, I. F. Vovkodav, V. L. Karlash, and A. F. Ulitko, "Issledovanie koeffitsienta elektromekhanicheskoy svyazi v kruglykh pezoeramicheskikh plastinakh [Coefficient of electromechanical coupling in piezoceramic disks]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 11, no. 4, pp. 42 – 48, 1975.
- [44]. V. L. Karlash, V. A. Klyushnichenko, Yu. A. Kramarov, and A. F. Ulitko, "Issledovanie radialnykh kolebaniy tonkih pezoeramicheskikh diskov pri neravnomernom elektricheskom nagruzhennii [Investigation of the radial vibrations of the thin piezoceramic disks with non-uniform electric loading]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 13, no. 3, pp. 56 – 62, 1977.
- [45]. V. L. Karlash, "K teorii nesimmetrichnykh kolebaniy pezoeramicheskikh kruglykh plastin s razdelennymi elektrodami [On the theory of the circular piezoceramic plates' with divided electrodes asymmetric vibrations]," *Izvestiya AN ArmSSR, mekhanika*, vol. 34, no. 6, pp. 60 – 65, 1981.
- [46]. A. Pyatrauskas, A. Prialgauskas, and A. Mazhonas, "Issledovanie kolebaniy sostavnykh kruglykh p'ezopreobrazovatelej [Investigation of the vibrations of the composed circular piezotransducers]," *Ultrazvuk*, vol. 19, pp. 107 – 113, 1987.
- [47]. Y. Ramanauskas, "Eksperimental'noe issledovanie diskovykh bimorfnykh ehlementov na izgibnykh kolebaniyah [Experimental investigation of the disk bimorph elements on flexural vibrations]," *Ultrazvuk*, vol. 20, pp. 158 – 163, 1990.
- [48]. N. A. Shul'ga and L. V. Borisenko, "Elektroprugie kolebaniya radialno polyarizovannogo pezoeramicheskogo tsilindra s chastichno ehlektrodivannymi bokovymi poverhnostyami [Electroelastic vibrations of radial polarized piezoceramic cylinder with partly electroded sides]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 26, no. 1, pp. 43 – 47, 1990.
- [49]. I. A. Kartashov and N. V. Marchenko, *Pezoelektricheskie transformatory toka* [Piezoelectric current transformer]. Kiev: Tekhnika, 1978
- [50]. V. V. Lavrinenko, *Pezoelektricheskie transformatory* [Piezoelectric Transformers]. Moscow: Energiya, 1975.
- [51]. Yu. A. Kramarov and V. A. Klyushnichenko, "Neravnomerno–polyarizovanniy pezopreobrazovatel [A non-uniform polarized piezotransducer]," *Acusticheskkiye metody i sredstva issledovaniya okeana*. Collection of scientific works. Part II, Vladivostok, pp. 3 – 6, 1974.
- [52]. V. G. Karnaukhov, V. I. Kozlov, V. V. Mikhaylenko, and S. V. Mikhaylenko, "Planarnye kolebaniya pezoeramicheskoy plastiny s uchetom depolyarizatsii materiala, vyzvannoy temperaturoy vibrorazogreva [Planar vibrations of the piezoceramic plate with accounting the material depolarization, caused by vibration heating]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 30, no. 3, pp. 67 – 73, 1994.
- [53]. S. I. Rudnitskiy, V. M. Sharapov, and N. A. Shu'iga, "Kolebaniya diskovogo bimorfno preobrazovatelya tipa metall-p'ezokeramika [Vibrations of the disk bimorph transducer of metal-piezoceramic type]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 26, no. 10, pp. 64 – 72, 1990.
- [54]. O. P. Chervinko and Ya. O. Zhuk, "Spivvidnoshennia zviazanoi dynamichnoi zadachi termoviazkoplastychnosti dlia hnuchkykh obolonok z piezoaktyvnymy sharamy [Relations of the coupled dynamic thermoviscoplastic problem for flexible shells with piezoactive layers]," *Dopovidi NAN Ukrainy*, no. 1, pp. 68 – 74, 2002
- [55]. V. L. Karlash, "Electroelastic vibrations and transformation ratio of a planar piezoceramic transformer," *J. Sound Vib.*, vol. 277, pp. 353 – 367, 2004. DOI: [10.1016/j.jsv.2003.03.012](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.03.012)
- [56]. V. Karlash, "Longitudinal and lateral vibrations of a planar piezoceramic transformer," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 44, part 1, no. 4A, pp. 1852 – 1856, 2005. DOI: [10.1143/JJAP.44.1852](https://doi.org/10.1143/JJAP.44.1852)
- [57]. J. Hu, Y. Fuda, M. Katsuno and T. A. Yoshiba, "Study on the rectangular-bar shaped multilayer piezoelectric transformer using length extensional vibration mode," *Jpn. J. Appl. Phys.*, vol. 38, pp. 3208 – 3212, 1999. DOI: [10.1143/JJAP.38.3208](https://doi.org/10.1143/JJAP.38.3208)
- [58]. H. Xue, J. Yang and Y. Hu, "Analysis of Rosen Piezoelectric Transformers with a Varying Cross-Section," *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr. Freq. Control*, vol. 55, no. 7, pp. 1632 – 1639, 2008. DOI: [10.1109/TUFFC.2008.837](https://doi.org/10.1109/TUFFC.2008.837)
- [59]. N. Y. Wong, Y. Zhang, H. L. W. Chan and C. L. Choy, "A bilayer piezoelectric transformer operating in a bending vibration mode," *Mater. Sci. Eng. B*, vol. 99, no. 1-3, pp. 164 – 167, 2003. DOI: [10.1016/S0921-5107\(02\)00472-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5107(02)00472-5)
- [60]. C. M. Leung, S. W. Or, F. Wang, S. L. Ho, H. Luo, "Enhanced magnetoelectric effect in heterostructure of magnetostrictive alloy bars and piezoelectric single-crystal transformer," *Rev. Sci. Instrum.*, vol. 82, issue 1, Art no. 013903, 2011. DOI: [10.1063/1.3529439](https://doi.org/10.1063/1.3529439)
- [61]. Sh. Dong, "Review on piezoelectric, ultrasonic and magnetoelectric actuators," *J. Adv. Dielect.*, vol. 2, no. 1, Art no. 1230001, 2012. DOI: [10.1142/S2010135X12300010](https://doi.org/10.1142/S2010135X12300010)



- [62]. V. H. Dubenets, O. V. Savchenko and O. L. Derkach, "Nonstationary vibrations of a beam with electro-viscoelastic dissipative patches," *Visnyk of Chernihiv state technological university*, no. 3 (67), pp. 53 – 61, 2013.
- [63]. V. Dubenets, O. Savchenko and O. Derkach, "Active damping of nonstationary vibrations in a beam with electro-viscoelastic dissipative patches," *Visnyk of Chernihiv state technological university*, no. 1 (71), pp. 43 – 50, 2014.
- [64]. O. I. Bezverkhyyi, L. P. Zinchuk, and V. L. Karlash, "Vplyv elektrychnoho navantazhennia na vymusheni kolyvannia poperechno poliaryzovanykh piezokeramichnykh sterzhniv [Effect of the electrical loading on forced vibrations of transversely polarized piezoceramic bars]," *Electronics and communication*, vol. 20, no. 4 (87), pp. 77 – 88, 2015. DOI: [10.20535/2312-1807.2015.20.4.69911](https://doi.org/10.20535/2312-1807.2015.20.4.69911)
- [65]. V. T. Grinchenko, V. L. Karlash, V. V. Meleshko, and A. F. Ulitko, "Issledovanie planarnykh kolebaniy pryamougolnykh pezokeramicheskikh plastin [Investigation of the planar vibrations of the rectangular piezoceramic plates]," *Prikladnaya mekhanika*, vol. 12, no. 5, pp. 71 – 78, 1976.
- [66]. O. N. Petrishchev, *Garmonicheskie kolebaniya pezokeramicheskikh elementov. CH. I. Garmonicheskie kolebaniya pezokeramicheskikh elementov v vakuume i metod rezonansa-antirezonansa* [Harmonic vibrations of the piezoceramic elements. Part I. [Harmonic vibrations of the piezoceramic elements in vacuum and resonance-anti-resonance method]. Kiev: Avers, 2012.
- [67]. O. N. Petrishchev, A. V. Korzhik, and A. V. Bogdanov, "Raschet chastotnoy kharakteristiki nesimmetrichnogo pezoelektricheskogo akselerometra [The calculation of the frequency characteristics of asymmetric piezoelectric accelerometer]," *Acoustic bulletin*, vol. 16, no. 2, pp. 47 – 55, 2013 – 2014.
- [68]. R. Holland, "The equivalent circuit of an N-electrode piezoelectric bar," in *Proc. IEEE*, vol. 54, no. 7, pp. 968 – 975, 1966. DOI: [10.1109/PROC.1966.4942](https://doi.org/10.1109/PROC.1966.4942)
- [69]. R. Holland, "The equivalent circuit of a symmetric N-electrode piezoelectric disk," *IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics*, vol. 14, no. 1, pp. 21–32, 1967. DOI: [10.1109/T-SU.1967.29406](https://doi.org/10.1109/T-SU.1967.29406)
- [70]. R. Holland and E. P. EerNisse, *Design of resonant piezoelectric devices*. Cambridge and London: M.I.T. Press, 1969. ISBN: 9780262080330
- [71]. V. M. Sharapov, Yu. Yu. Bondarenko, M. P. Musiyenko, and T. Yu. Kisil, "About the methods of a linearization of a peak-frequency characteristics of piezoceramic transducers," *Visnyk ChDTU*, no. 3, pp. 51 – 53, 2005.
- [72]. V. M. Sharapov, M. P. Musiyenko, and S. A. Filimonov, "The investigation of frequency characteristics of piezotransducers with double circuit negative feedback," *Visnyk ChDTU. Spetsvyvusk*, pp. 262 – 264, 2006.
- [73]. IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Measurements of Piezoelectric Ceramics, in *Proc. IRE*, vol. 49, iss. 7, pp. 1161 – 1169, 1961. DOI: [10.1109/JRPROC.1961.287860](https://doi.org/10.1109/JRPROC.1961.287860)
- [74]. V. A. Akopyan, A. N. Soloviev, and S. N. Shevtsov, *Metody i algoritm opredeleniya polnogo nabora sovmestimykh materialnykh konstant pezokeramicheskikh materialov [Methods and algorithm to determine the complete set of compatible material constants of piezoelectric materials]*. Rostov-on-Don: Publishing House of the SFU, 2008.

